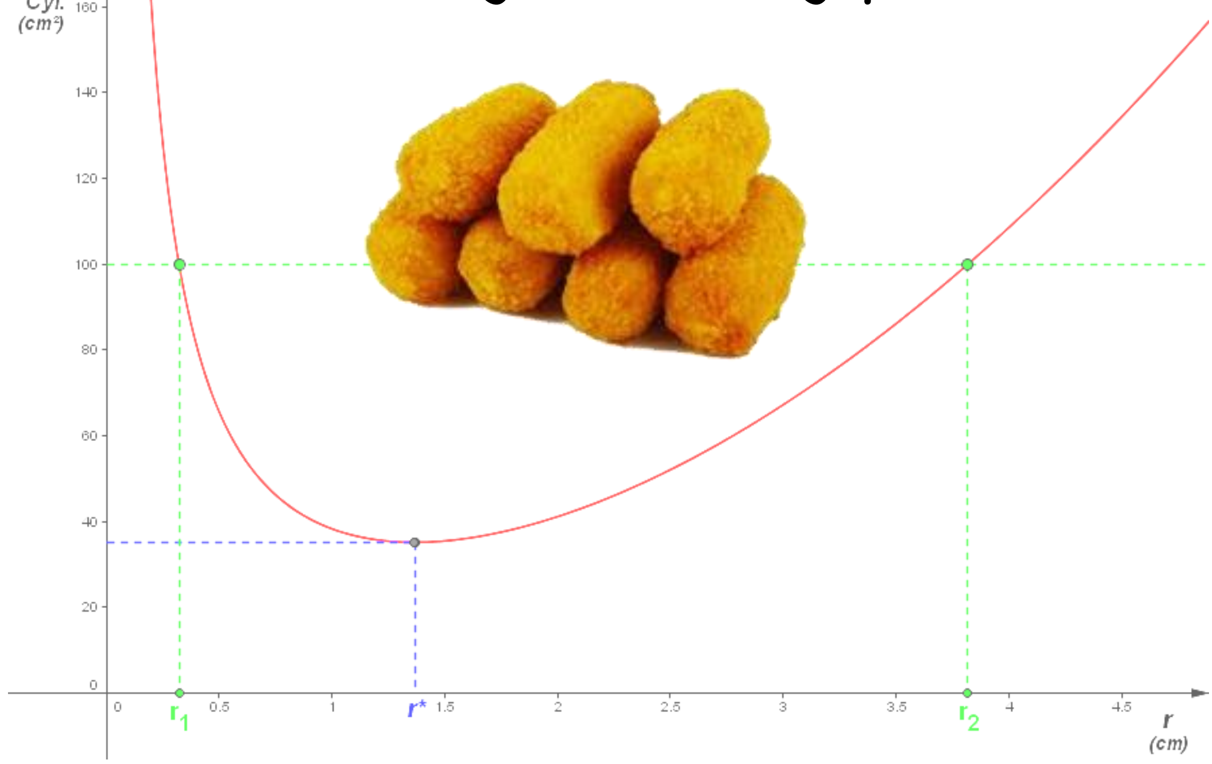
CReHeH
Centre de Recherche
HAUTE ECOLE
de la Communauté française
EN HAINAUT

Cellule de Géométrie

ECOLE NORMALE
iSEP

Mathématiques élémentaires

Les dérivées au service de la gastronomie
et des régimes en Belgique



Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel — demal.michel@skynet.be
DRAMAIX Jérémy — jeremy.dramaix@gmail.com
HIGNY Samuel — higny_samuel@hotmail.com
LAFOT Cindy — lafot.cindy@hotmail.com
MALAGUARNERA Angelo — angelo.malaguarnera@gmail.com

Ce document "clin d’œil" est l’occasion de montrer que les dérivées sont aussi des outils pour résoudre des problèmes concrets. Ainsi, nous rechercherons parmi des croquettes de pommes de terre isovolumétriques celle qui sera la plus light après cuisson dans une friture. Nous étendrons cette même question parmi les croquettes cylindriques de surface minimale, les croquettes de forme cubique et les croquettes de forme sphérique. Nous aborderons également, grâce à Pythagore, le problème de la forme des frites les plus "light".

Les dérivées au service de la gastronomie et des régimes en Belgique

1. Introduction

Cet atelier clin d'œil est l'occasion de montrer que les mathématiques, et en particulier les dérivées, sont aussi des outils pour résoudre des petits problèmes concrets et ludiques.

Les croquettes de pommes de terre sont généralement des petits cylindres de purée de pommes de terre (recouverts de chapelure) qui sont cuits dans un bain de graisse de bœuf ou d'huile et dont les Belges sont friands. Il existe plusieurs modèles de croquettes qui dépendent, bien entendu, de la quantité de purée qui les constitue, c'est-à-dire du volume de purée qui intervient dans leur fabrication.

Ce qui est méconnu du grand public c'est que, pour un même volume "V_0" fixé, il existe une infinité de croquettes cylindriques de capacité "V_0", mais de surfaces "S" différentes.

Nous vous proposons dans la première partie de déterminer, parmi toutes les croquettes cylindriques iso-volumétriques, celle dont la surface est minimale. Il s'agira de la croquette la plus light possible. En effet, nous supposerons que plus la surface de la croquette est petite, moins elle contiendra de graisse ou d'huile après cuisson.

Ensuite, dans la seconde partie:

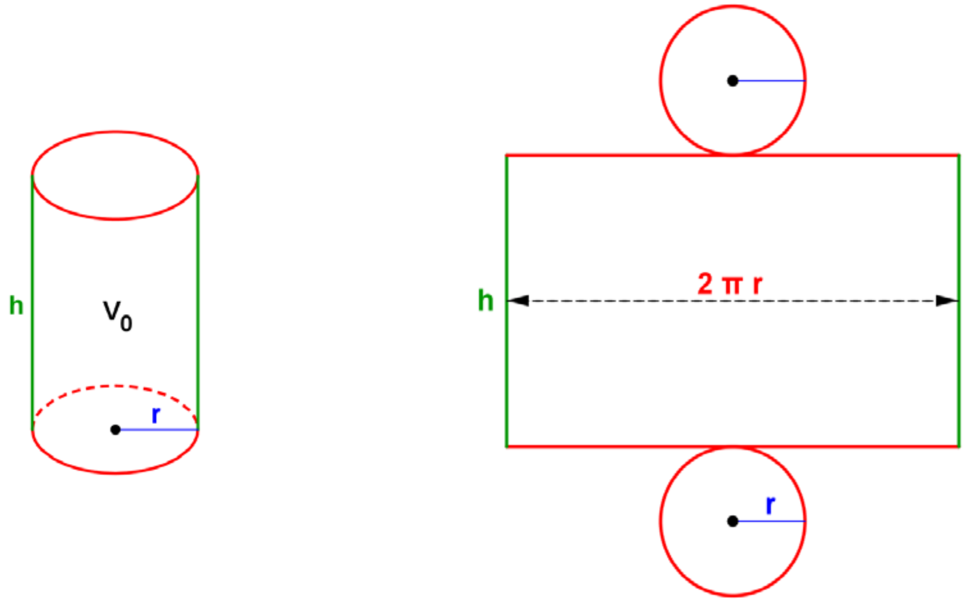
1) Nous déterminerons, pour un même volume "V_0" fixé, la croquette ayant la plus petite surface parmi les croquettes cylindriques de surface minimale, les croquettes cubiques et les croquettes sphériques;

2) Nous calculerons également les variations, en pourcent, des teneurs en graisse des trois types de croquettes par rapport à la croquette la plus light.

Il est à remarquer que ces trois types de croquettes sont fabriquées par l'industrie alimentaire.

2. Première partie

Le premier problème se ramène à déterminer, pour un volume déterminé "V_0", les dimensions du cylindre qui admet la plus petite surface possible.



2.1. Détermination de la surface totale minimale d'une croquette cylindrique de volume "V_0" déterminé

La surface totale d'un cylindre " S_{cyl} " de rayon "r" et de hauteur "h" est:

$$S_{cyl} = 2 \cdot (\pi r^2) + 2\pi r \cdot h \qquad (1)$$

Vu que les différentes croquettes cylindriques ont le même volume "V_0", il vient:

$$V_0 = \pi r^2 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{V_0}{\pi r^2} \qquad (2)$$

La fonction qui représente les différentes surfaces de toutes les croquettes cylindriques de volume "V_0" est, dés lors, donnée par:

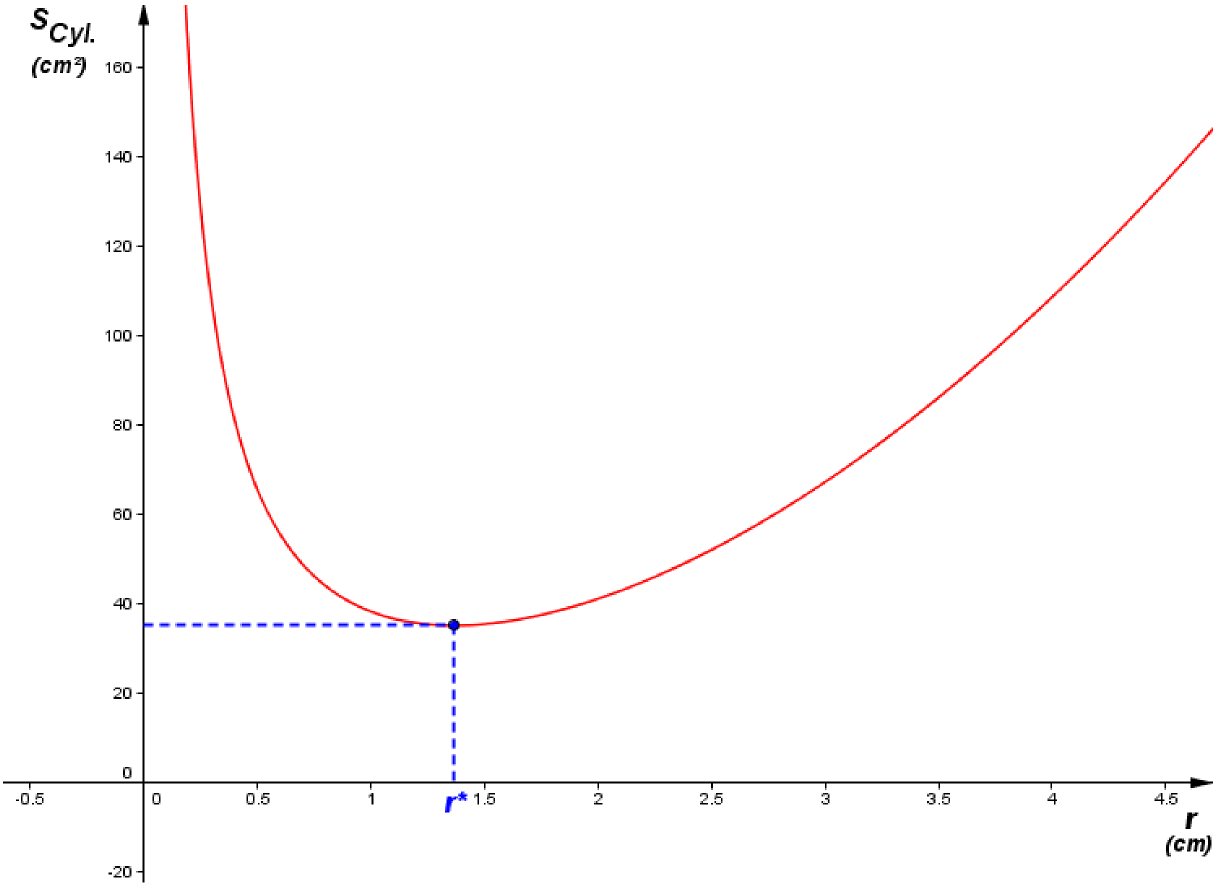
$$S_{cyl}(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V_0}{\pi r^2} \qquad (2) \text{ dans } (1)$$

$$S_{cyl}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r} \qquad \text{avec } r \in \mathbb{R}_0^+$$

Le graphe de cette fonction montre qu'il existe un rayon "r^*"pour lequel la surface totale de la croquette cylindrique correspondante est minimale:

$$S_{cyl}(r^*) = 2\pi(r^*)^2 + \frac{2V_0}{r^*}$$

Graphe de la surface totale des croquettes cylindriques de volume V_0 déterminé (ici, $V_0 = 16$ cm³ ou 1,6 cl) en fonction de leur rayon.



Remarques:

1) Intuitivement, le graphe de la fonction S_{cyl} était prévisible puisque:

a) $S_{cyl} > 0$

✓ $S_{cyl} = 0$ signifierait qu'il existe une croquette de volume $V_0 \neq 0$ et de surface totale nulle, ce qui est bien entendu impossible.

✓ De même, $S_{cyl} < 0$ est impossible puisqu'une surface réelle est toujours positive.

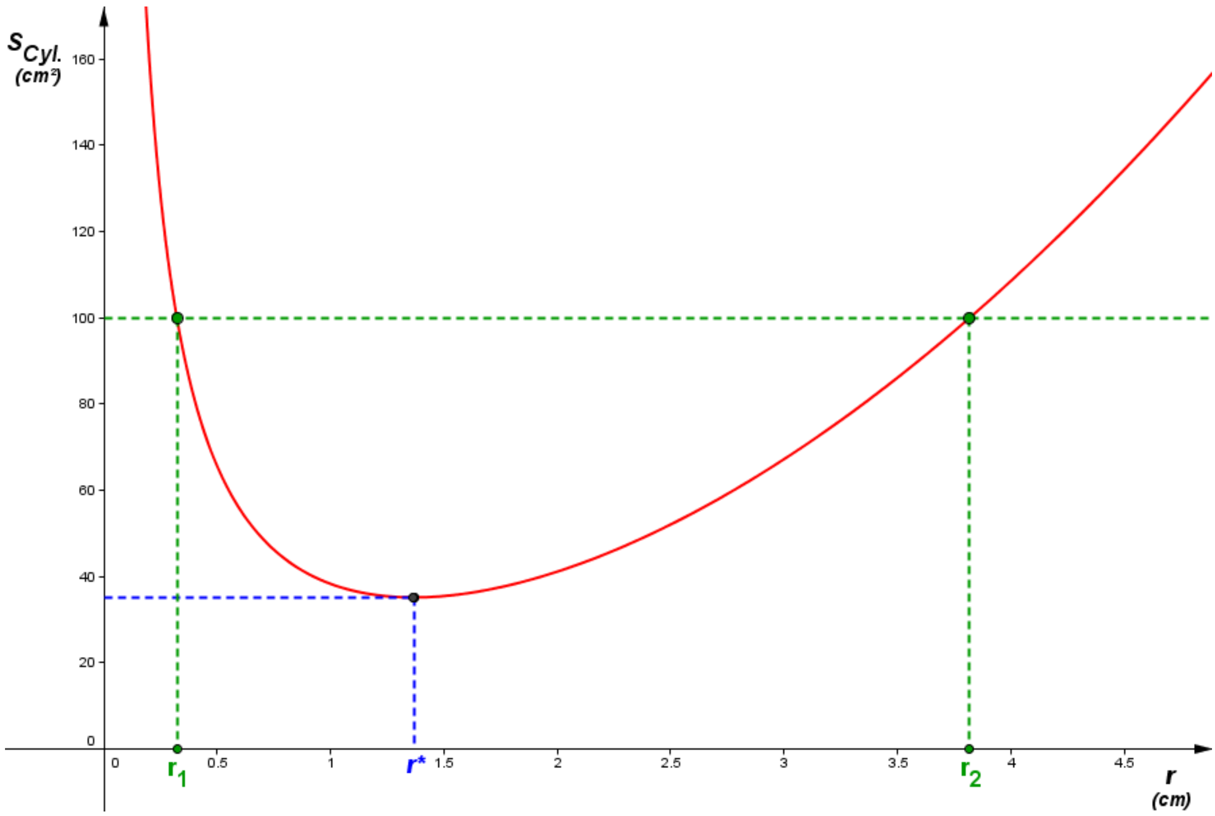
b) $$\lim_{r \to 0} S_{cyl} = \lim_{r \to 0} \Big(\underbrace{2\pi r^2}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\frac{2V_0}{r}}_{\downarrow \, +\infty} \Big) = +\infty$$

c) $$\lim_{r \to +\infty} S_{cyl} = \lim_{r \to +\infty} \Big(\underbrace{2\pi r^2}_{\downarrow \, +\infty} + \underbrace{\frac{2V_0}{r}}_{\downarrow \, 0} \Big) = +\infty$$

2) L'analyse de ce graphe montre que pour un volume "V_0" déterminé, il existe une infinité de croquettes cylindriques de surfaces différentes. De plus, on peut obtenir deux cylindres de capacité "V_0" et de surface totale infinie:
   - un cylindre dont le rayon de la base tend vers zéro et la hauteur vers l'infini;
   - un cylindre dont le rayon de la base tend vers l'infini et la hauteur vers zéro.

3) Pour une surface donnée entre la surface minimale $S_{cyl}\ (r^*) = 2\pi(r^*)^2 + \dfrac{2V_0}{r^*}$ et l'infini, il existe 2 cylindres différents de capacité "V_0":

   Considérons, par exemple, des croquettes cylindriques iso-volumétriques (V_0 = 16 cm³) et de surface totale: S_{cyl} = 100 cm². Deux modèles de croquettes sont envisageables:
   - Croquette 1: r_1 = 0,32 cm et $h_1 \approx$ 49,736 cm
   - Croquette 2: r_2 = 3,82 cm et $h_2 \approx$ 0,349 cm



4) La hauteur de cette croquette cylindrique de surface minimale est: $h^* = \dfrac{V_0}{\pi(r^*)^2}$ (3)

2.2. Détermination des dimensions (r^* et h^*) de la croquette de volume V_0 et de surface minimale

Pour déterminer le rayon qui rend la fonction $S_{cyl}\ (r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V_0}{r}$ minimale, nous ferons appel aux dérivées première et seconde.

La dérivée première de la fonction S_{cyl} (r) est:

$$S'_{cyl}(r) = \left(2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}\right)' = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2}$$

Le rayon (r^*) qui rend la fonction minimale est obtenu en recherchant la valeur du rayon qui annule la dérivée première:

$$4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r = \frac{2V_0}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r^3 = 2V_0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V_0}{2\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

Le rayon qui rend la fonction minimale sera donc:

$$r^* = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} \qquad (4)$$

La dérivée seconde de la fonction S_{cyl} (r) est:

$$S''_{cyl}(r) = \left(2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}\right)'' = \left(4\pi r - \frac{2V_0}{r^2}\right)' = 4\pi + \frac{4V_0}{r^3}$$

On constate que $S''_{cyl}(r) > 0$ pour tout rayon positif.

Par conséquent, $r^* = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ est la valeur du rayon qui minimise la fonction S_{cyl} (r) pour tout rayon positif.

La hauteur de la croquette cylindrique de volume V_0 et de surface minimale $S_{cyl}(r^*)$ vaut donc:

$$h^* = \frac{V_0}{\pi(r^*)^2} = \frac{V_0}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V_0}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}} = \frac{V_0}{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^3}} = \frac{V_0}{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}}{\frac{V_0}{2\pi}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} = 2r^*$$

La surface minimale vaut donc:

$$S_{cyl}(r^*) = 2\pi(r^*)^2 + \frac{2V_0}{r^*} = 2\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)^2 + \frac{2V_0}{\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}} = 2\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2} + \frac{2V_0}{\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2}}$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2} + \frac{2V_0 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^3}} = 2\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2} + \frac{2V_0 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2}}{\frac{V_0}{2\pi}}$$

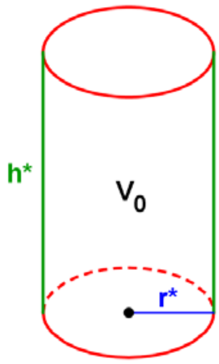
$$= 2\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2} + 4\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2} = 6\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2}$$

Remarque: Le problème montre, qu'il existe une infinité de croquettes iso-volumétriques dont la surface peut varier de $6\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2}$ à l'infini.

3. Deuxième partie

3.1. Détermination, pour un volume "V_0" fixé, de la croquette ayant la plus petite surface parmi les croquettes cylindriques de surface minimale, les croquettes cubiques et les croquettes sphériques

3.1.1. Détermination de la surface d'une croquette cylindrique de volume "V_0" fixé et de surface minimale



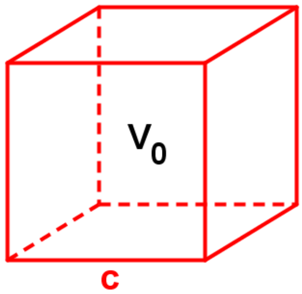
Dans la première partie, nous avons montré que la croquette cylindrique de rayon "$r^* = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$" et de hauteur "$h^* = \sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}$" est la croquette cylindrique de surface minimale.

Cette surface minimale vaut:

$$S_{cyl}(r^*) = S_{cylindre\ optimum} = 6\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^2} = \frac{6\pi \cdot \sqrt[3]{V_0^2}}{\sqrt[3]{(2\pi)^2}} = \frac{6\pi \cdot \sqrt[3]{V_0^2}}{\sqrt[3]{(2\pi)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2\pi}}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{6\pi \cdot \sqrt[3]{V_0^2} \cdot \sqrt[3]{2\pi}}{\sqrt[3]{(2\pi)^3}}$$

$$= \frac{6\pi \cdot \sqrt[3]{V_0^2} \cdot \sqrt[3]{2\pi}}{2\pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}$$

3.1.2. Détermination de la surface d'une croquette cubique de volume "V_0" fixé



La surface totale d'un cube de côté "c" est donnée par:

$$S_{cube} = 6 \cdot c^2$$

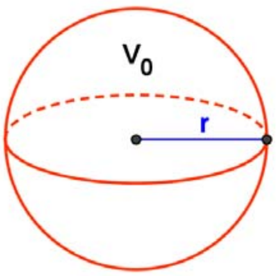
Sachant que le volume du cube est "V_0", il vient:

$$V_0 = c^3 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt[3]{V_0}$$

Dès lors:

$$S_{cube} = 6 \cdot \left(\sqrt[3]{V_0}\right)^2 = 6 \cdot \sqrt[3]{V_0^2}$$

3.1.3. Détermination de la surface d'une croquette sphérique de volume "V_0" fixé



La surface totale d'une sphère de rayon "r" est donnée par:

$$S_{sphère} = 4\pi r^2$$

Sachant que le volume d'une sphère de rayon "r" est "V_0", il vient:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{V_0}$$

Dès lors:

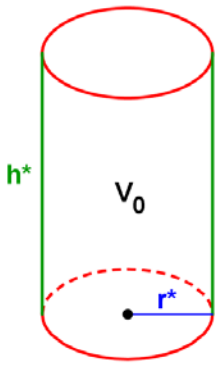
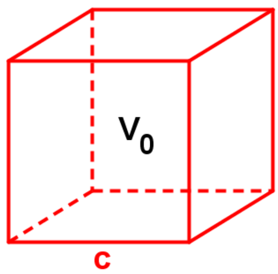
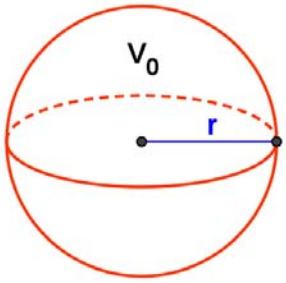
$$S_{sphère} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{V_0}\right)^2 = 4\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{3^2}{(4\pi)^2}} \cdot \sqrt[3]{V_0^2} = \frac{4\pi \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{(4\pi)^2}} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}$$

$$= \frac{4\pi\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{(4\pi)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4\pi}}{\sqrt[3]{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{V_0^2} = \frac{4\pi\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{4\pi}}{\sqrt[3]{(4\pi)^3}} \cdot \sqrt[3]{V_0^2} = \frac{4\pi\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{4\pi}}{4\pi} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}$$

$$= \sqrt[3]{36\pi}\cdot\sqrt[3]{V_0^2}$$

3.1.4. En résumé

Les surfaces totales des trois types de croquettes de volume "V_0" fixé sont:

	$S_{\text{cylindre optimum}} = 3\cdot\sqrt[3]{2\pi}\cdot\sqrt[3]{V_0^2} = \sqrt[3]{54\pi}\cdot\sqrt[3]{V_0^2}$
	$S_{\text{cube}} = 6\cdot\sqrt[3]{V_0^2} = \sqrt[3]{216}\cdot\sqrt[3]{V_0^2}$
	$S_{\text{sphère}} = \sqrt[3]{36\pi}\cdot\sqrt[3]{V_0^2}$

Pour classer les croquettes de volume "V_0" par surface croissante, il suffit de comparer les coefficients de $\sqrt[3]{V_0^2}$ (*), à savoir: $\sqrt[3]{54\pi}$, $\sqrt[3]{216}$ et $\sqrt[3]{36\pi}$.

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[3]{36\pi} & < & \sqrt[3]{54\pi} & < & \sqrt[3]{216} \\ 4{,}83598\ldots & < & 5{,}53581\ldots & < & 6 \end{array}$$

Il en résulte que pour un même volume "V_0" donné: $S_{\text{sphère}} < S_{\text{cylindre optimum}} < S_{\text{cube}}$

(*) Ce résultat montre que la réponse est indépendante de la valeur "V_0" et dés lors, le classement obtenu reste valable quelle que soit la valeur du volume "V_0" considéré.

3.2. Détermination, en pourcent, des variations des teneurs en graisse des trois types de croquettes par rapport à la croquette la plus light

3.2.1. Comparaison de la surface de la croquette cylindrique optimum par rapport à la surface de la croquette sphérique

Si la croquette la plus light, à savoir la croquette sphérique, est considérée comme référentiel, il vient:

$$S_{\text{cylindre optimum}} = x \cdot S_{\text{sphère}}$$

$$x = \frac{S_{\text{cylindre optimum}}}{S_{\text{sphère}}} = \frac{\sqrt[3]{54\pi} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}}{\sqrt[3]{36\pi} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}} = \frac{\sqrt[3]{54\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}} = \sqrt[3]{\frac{54\pi}{36\pi}} = \sqrt[3]{\frac{54}{36}} \approx 1{,}1447$$

Dès lors, la surface de la croquette cylindrique optimum équivaut à 114,47 % de la surface de la croquette sphérique. La variation de surface est donc de 14,47 %. La croquette cylindrique optimum est donc 14,47 % plus grasse que la croquette sphérique.

3.2.2. Comparaison de la surface de la croquette cubique par rapport à la surface de la croquette sphérique

Si la croquette la plus light, à savoir la croquette sphérique, est considérée comme référentiel, il vient:

$$S_{\text{cube}} = x \cdot S_{\text{sphère}}$$

$$x = \frac{S_{\text{cube}}}{S_{\text{sphère}}} = \frac{\sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}}{\sqrt[3]{36\pi} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{36\pi}} = \sqrt[3]{\frac{216}{36\pi}} \approx 1{,}2407$$

Dès lors, la surface de la croquette cubique équivaut à 124,07 % de la surface de la croquette sphérique. La variation de surface est donc de 24,07 %. La croquette cubique est donc 24,07 % plus grasse que la croquette sphérique.

3.2.3. Tableau récapitulatif

Type de croquettes	Surface totale de la croquette	
Croquette sphérique	$S_{\text{sphère}} = \sqrt[3]{36\pi} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}$	100 %
Croquette cylindrique optimum	$S_{\text{cylindre optimum}} = \sqrt[3]{54\pi} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}$	114,47 %
Croquette cubique	$S_{\text{cube}} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{V_0^2}$	124,07 %

Surface croissante