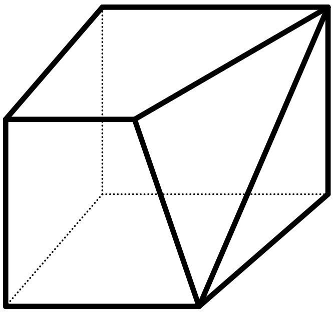
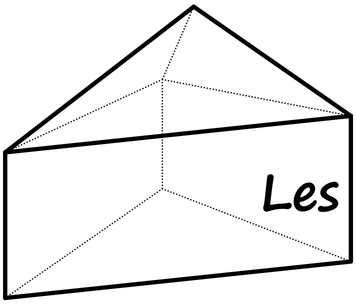
Cellule de Géométrie

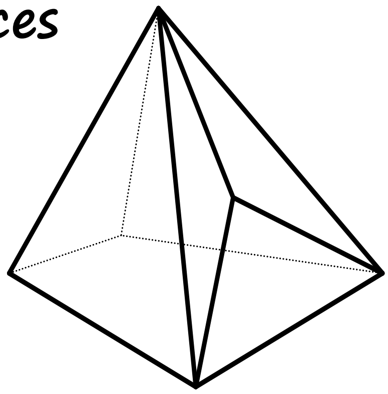
Mathématiques élémentaires





Les polyèdres euclidiens convexes à

4 – 5 – 6 – 7 faces



Cellule de Géométrie – Catégorie pédagogique de la HEH

DEMAL Michel
demal.michel@skynet.be

DRAMAIX Jérémy
jeremy.dramaix@gmail.com

HIGNY Samuel
higny_samuel@hotmail.com

LAFOT Cindy
lafot.cindy@hotmail.com

MALAGUARNERA Angelo
angelo.malaguarnera@gmail.com

Avec la collaboration de

ADABBO F. - BIELEN R. - GOETGEBUER C. - SIMPLICIO D.

Plan

I - Polyèdres euclidiens convexes à 4 - 5 - 6 et 7 faces

1. Introduction

Le sujet de ce travail est la détermination des différents types de polyèdres euclidiens convexes à 4 - 5 - 6 et 7 faces.

Nous partons de propriétés liées aux polyèdres convexes telles que:

- Le nombre de faces.
- Les relations liant le nombre de sommets au nombre d'arêtes.
- Les relations liant le nombre de faces au nombre d'arêtes.
- La relation d'Euler (F + S – A = 2).

De plus, nous utilisons également une formule d'analyse combinatoire nous permettant d'obtenir le nombre de solutions potentielles afin de déterminer les différents types de polyèdres euclidiens convexes à sept faces.

Ce travail contient aussi les éléments suivants:

- La détermination du polyèdre euclidien convexe à 4 faces.
- La détermination des polyèdres euclidiens convexes à 5 faces.
- La détermination des polyèdres euclidiens convexes à 6 faces.
- Les équations permettant d'entamer la détermination des polyèdres euclidiens convexes à 8 faces.
- Deux annexes:
    - L'application détaillée de la formule d'analyse combinatoire permettant la détermination des différents types de polyèdres euclidiens convexes à 7 faces.

      (Cf. pg. II - 60)

    - Le travail de Monsieur Michel Lafond qui a déterminé les 34 polyèdres euclidiens convexes à 7 faces d'une manière différente de la nôtre.

      (Cf. pg. III - 61)

2. Polyèdres euclidiens convexes à 4 - 5 - 6 et 7 faces

Dans cette partie, nous déterminerons le nombre et les différents types de polyèdres euclidiens convexes à 4 - 5 - 6 et 7 faces et présenterons les équations permettant la découverte des polyèdres euclidiens convexes à 8 faces. Nous partirons pour ce faire de propriétés liées aux polyèdres convexes, en particulier du nombre de faces et des relations liant le nombre de sommets au nombre d'arêtes, le nombre de faces au nombre d'arêtes ainsi que de la relation d'Euler (F + S – A = 2).
De plus, une formule d'analyse combinatoire (combinaisons avec répétitions) permettra de déterminer le nombre de solutions potentielles pour les polyèdres euclidiens convexes à 7 faces.

$$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

(Cf. pg. II - 60)

2.1. Rappels

Dans tout polyèdre convexe,

a) **F + S – A = 2**: formule d'Euler qui est une condition nécessaire.

b) $F = \sum_{i=3}^{M} F_i = F_3 + F_4 + \ldots + F_i + \ldots + F_M$

où
- **F** représente le nombre total de faces (= nombre de faces triangulaires + nombre de faces carrées + ...).
- F_i représente le nombre de faces qui possèdent i côtés.
- F_M représente le nombre de faces qui possèdent le plus de côtés (M côtés).

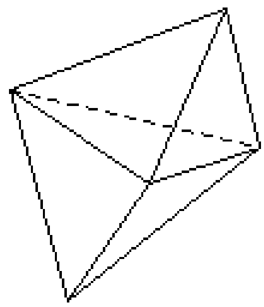
$S = \sum_{i=3}^{T} S_i = S_3 + S_4 + \ldots + S_i + \ldots + S_T$

où
- **S** représente le nombre total de sommets (= nombre de sommets d'ordre 3 + nombre de sommets d'ordre 4 + ...)
- S_i représente le nombre de sommets d'ordre i.
- S_T représente le nombre de sommets où il arrive le plus de faces (T faces).

c) $A = \frac{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + iF_i + \ldots + MF_M}{2} = \frac{\sum_{i=3}^{M} iF_i}{2}$

$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + iF_i + \ldots + MF_M = \sum_{i=3}^{M} iF_i$

A titre d'exemple:



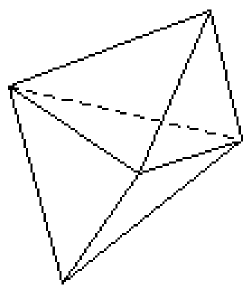
- $F_3 = 6$
- A = $\dfrac{\sum_{i=3}^{M} iF_i}{2} = \dfrac{3F_3}{2} = \dfrac{3\times 6}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

Dès lors, $2A = 3F_3 = 3 \times 6 = 18$.

d) $\mathbf{A = \dfrac{3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots + iS_i + \ldots + TS_T}{2} = \dfrac{\sum_{i=3}^{T} iS_i}{2}}$

$\mathbf{2A = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots + iS_i + \ldots + TS_T = \sum_{i=3}^{T} iS_i}$

A titre d'exemple:



- $S_3 = 2$ et $S_4 = 3$
- A = $\dfrac{\sum_{I=3}^{T} iS_i}{2} = \dfrac{3S_3 + 4S_4}{2} = \dfrac{(3\times 2) + (4\times 3)}{2} = \dfrac{6+12}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

Dès lors, $2A = 3S_3 + 4S_4 = (3 \times 2) + (4 \times 3) = 6 + 12 = 18$.

e) $\mathbf{3F \leq 2A}$

En effet,

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + iF_i + \ldots + MF_M \\ &= 3.\,(F_3 + F_4 + F_5 + \ldots + F_i + \ldots + F_M) + F_4 + 2F_5 + \ldots + (i-3)\,F_i + \ldots + (M-3)\,F_M \\ &= 3F + \underbrace{F_4 + 2F_5 + \ldots + (i-3)\,F_i + \ldots + (M-3)\,F_M}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Dès lors, $2A \geq 3F$

f) $3S \leq 2A$

En effet,

$$\begin{aligned} 2A &= 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots + iS_i + \ldots + TS_T \\ &= 3.(S_3 + S_4 + S_5 + \ldots + S_i + \ldots + S_T) + S_4 + 2S_5 + \ldots + (i-3)S_i + \ldots + (T-3)S_T \\ &= 3S + \underbrace{S_4 + 2S_5 + \ldots + (i-3)\, S_i + \ldots + (T-3)\, S_T}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Dès lors, $2A \geq 3S$

g) $A + 6 \leq 3S$

En effet,

comme les polyèdres sont convexes: $F + S - A = 2$

D'où, $3F + 3S - 3A = 6$ et $3F = 6 + 3A - 3S$

De plus, $3F \leq 2A$

Dès lors, $6 + 3A - 3S \leq 2A$ et $6 + A \leq 3S$

h) $A + 6 \leq 3F$

En effet,

comme les polyèdres sont convexes: $F + S - A = 2$

D'où, $3F + 3S - 3A = 6$ et $3S = 6 + 3A - 3F$

De plus, $3S \leq 2A$

Dès lors, $6 + 3A - 3F \leq 2A$ et $6 + A \leq 3F$

Ces quatre dernières relations peuvent se résumer par:

Dans tout polyèdre convexe:

$A + 6 \leq 3F \leq 2A$

$A + 6 \leq 3S \leq 2A$

2.2. Le polyèdre euclidien convexe à 4 faces

Comme le polyèdre euclidien convexe possède 4 faces, il vient que:

1) $F = 4$

2) $S = A - 2$ car:

$$\begin{aligned} F + S - A &= 2 \\ 4 + S - A &= 2 \\ S &= A - 2 \end{aligned}$$

3) A = 6 car: $A + 6 \leq 3F \leq 2A$
$A + 6 \leq 12 \leq 2A$

$$\begin{cases} A + 6 \leq 12 \\ 12 \leq 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 12 - 6 \\ 6 \leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 6 \\ 6 \leq A \end{cases}$$

D'où: $6 \leq A \leq 6$

4) M et $T \leq 3$ car: 1° Si M = 4, c'est-à-dire si la face au plus grand nombre de côtés est un 4-gone, le polyèdre euclidien aura au minimum 5 faces. Or, F = 4.

2° Si T = 4, c'est-à-dire si le sommet d'ordre 4 est le sommet dont l'ordre est le plus grand, le polyèdre euclidien possédera au minimum 5 faces. Or, F = 4.

Détermination du polyèdre euclidien convexe à 4 faces:

Lorsque le nombre de faces (F) vaut 4, le nombre d'arêtes est égal à 6. La détermination du polyèdre euclidien convexe à 4 faces se fera en analysant le cas où le nombre d'arêtes vaut 6.

Cas où il y a 6 arêtes:

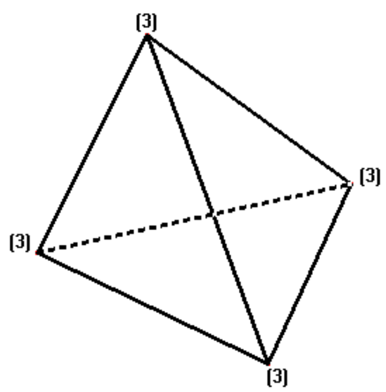
a) A = 6

b) S = A – 2
S = 6 – 2
S = 4

c) $M \leq 3 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 4 = F_3$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 12 = 3F_3$
$\Big\}\ F_3 = 4$

d) $T \leq 3 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 4 = S_3$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 12 = 3S_3$
$\Big\}\ S_3 = 4$

Ce polyèdre euclidien est constitué de 4 triangles. De plus, il s'articule autour de 4 sommets d'ordre 3.



Ce polyèdre est un tétraèdre.

2.3. Les polyèdres euclidiens convexes à 5 faces

Comme le polyèdre euclidien convexe possède 5 faces, il vient que:

1) $F = 5$

2) $S = A - 3$ car:
$$\begin{aligned} F + S - A &= 2 \\ 5 + S - A &= 2 \\ S &= A - 3 \end{aligned}$$

3) $8 \leq A \leq 9$ car:
$$A + 6 \leq 3F \leq 2A$$
$$A + 6 \leq 15 \leq 2A$$
$$\begin{cases} A + 6 \leq 15 \\ 15 \leq 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 15 - 6 \\ 7{,}5 \leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 9 \\ 7{,}5 \leq A \end{cases}$$

D'où: $8 \leq A \leq 9$

4) M et $T \leq 4$ car:

1° Si M = 5, c'est-à-dire si la face au plus grand nombre de côtés est un 5-gone, le polyèdre euclidien aura au minimum 6 faces. Or, F = 5.

2° Si T = 5, c'est-à-dire si le sommet d'ordre 5 est le sommet dont l'ordre est le plus grand, le polyèdre euclidien possédera au minimum 6 faces. Or, F = 5

Détermination des différents types de polyèdres euclidiens convexes à 5 faces:

Lorsque le nombre de faces (F) vaut 5, le nombre d'arêtes est compris entre 8 et 9. La détermination de tous les types de polyèdres euclidiens convexes à 5 faces se fera en analysant les cas où le nombre d'arêtes vaut respectivement 8 et 9.

- Cas où il y a 8 arêtes:

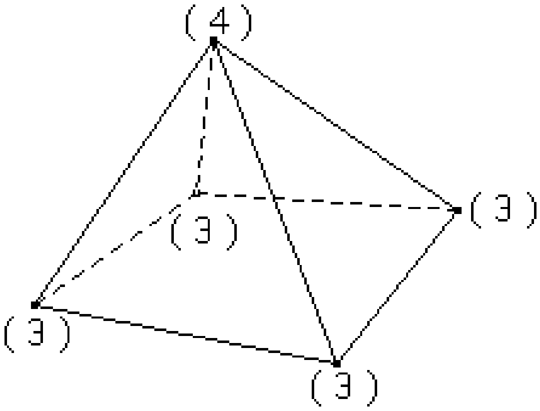
a) $A = 8$

b) $S = A - 3$
$S = 8 - 3$
$S = 5$

c)
$$\left.\begin{aligned} M \leq 4 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i &\Rightarrow 5 = F_3 + F_4 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i &\Rightarrow 16 = 3F_3 + 4F_4 \end{aligned}\right\} \quad F_3 = 4 \text{ et } F_4 = 1$$

d)
$$\left.\begin{aligned} T \leq 4 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i &\Rightarrow 5 = S_3 + S_4 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i &\Rightarrow 16 = 3S_3 + 4S_4 \end{aligned}\right\} \quad S_3 = 4 \text{ et } S_4 = 1$$

Ce polyèdre euclidien est constitué de 4 triangles et d'1 quadrilatère. De plus, il s'articule autour d'1 sommet d'ordre 4 et de 4 sommets d'ordre 3.



Ce polyèdre est une pyramide à base 4.

- Cas où il y a 9 arêtes:

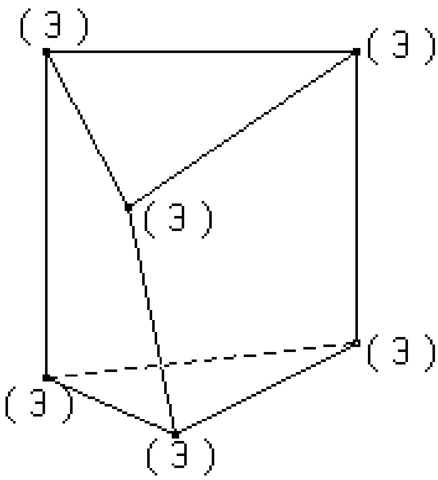
a) $A = 9$

b) $S = A - 3$
$S = 9 - 3$
$S = 6$

c) $M \leq 4 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 5 = F_3 + F_4$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 18 = 3F_3 + 4F_4$
$F_3 = 2$ et $F_4 = 3$

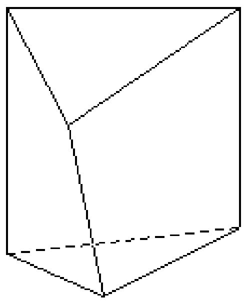
d) $T \leq 4 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 6 = S_3 + S_4$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 18 = 3S_3 + 4S_4$
$S_3 = 6$ et $S_4 = 0$

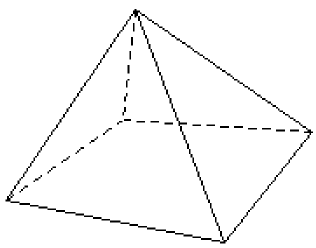
Ce polyèdre euclidien est constitué de 2 triangles et de 3 quadrilatères. Il possède également 6 sommets d'ordre 3.



En conclusion, il y a 2 types de polyèdres euclidiens convexes à 5 faces.

Les 2 types de polyèdres euclidiens convexes à 5 faces





2.4. Les polyèdres euclidiens convexes à 6 faces

Comme le polyèdre euclidien convexe possède 6 faces, il vient que:

1) F = 6

2) S = A – 4 car:

$$\begin{aligned} F + S - A &= 2 \\ 6 + S - A &= 2 \\ S &= A - 4 \end{aligned}$$

3) $9 \leq A \leq 12$ car:

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A$$
$$A + 6 \leq 18 \leq 2A$$

$$\begin{cases} A + 6 \leq 18 \\ 18 \leq 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 18 - 6 \\ 9 \leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 12 \\ 9 \leq A \end{cases}$$

D'où: $9 \leq A \leq 12$

4) M et $T \leq 5$ car:

1° Si M = 6, c'est-à-dire si la face au plus grand nombre de côtés est un 6-gone, le polyèdre euclidien aura au minimum 7 faces. Or, F = 6.

2° Si T = 6, c'est-à-dire si le sommet d'ordre 6 est le sommet dont l'ordre est le plus grand, le polyèdre euclidien possédera au minimum 7 faces. Or, F = 6

Détermination des différents types de polyèdres euclidiens convexes à 6 faces:

Lorsque le nombre de faces (F) vaut 6, le nombre d'arêtes est compris entre 9 et 12. La détermination de tous les types de polyèdres euclidiens convexes à 6 faces se fera en analysant les cas où le nombre d'arêtes vaut respectivement 9, 10, 11 et 12.

- Cas où il y a 9 arêtes:

a) A = 9

b) S = A – 4
S = 9 – 4
S = 5

c)
$$\left.\begin{aligned} M \leq 5 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i &\Rightarrow 6 = F_3 + F_4 + F_5 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i &\Rightarrow 18 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \end{aligned}\right\} \quad F_4 + 2F_5 = 0 \;\Downarrow\; F_4 = F_5 = 0 \text{ et } F_3 = 6 \;\; (a)$$

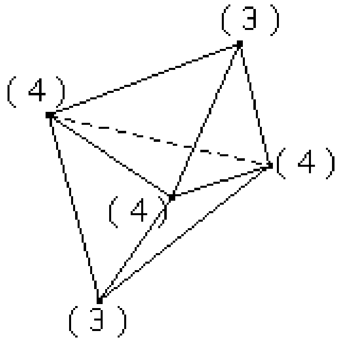
d)
$$\left.\begin{aligned} T \leq 5 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i &\Rightarrow 5 = S_3 + S_4 + S_5 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i &\Rightarrow 18 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 \end{aligned}\right\} \quad S_4 + 2S_5 = 3 \;\Downarrow$$

$S_5 = 0$, $S_4 = 3$ et $S_3 = 2$ (1)

$S_5 = 1$, $S_4 = 1$ et $S_3 = 3$ (2)

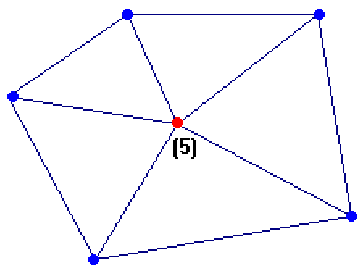
Les deux solutions potentielles sont:

(a)(1) $F_3 = 6$, $F_4 = 0$, $F_5 = 0$
$S_3 = 2$, $S_4 = 3$, $S_5 = 0$
↳ Le polyèdre euclidien convexe ci-dessous remplit ces conditions.



Ce polyèdre est un bitétraèdre.

(a)(2) $F_3 = 6$, $F_4 = 0$, $F_5 = 0$
$S_3 = 3$, $S_4 = 1$, $S_5 = 1$
↳ Impossible



Au sommet d'ordre 5, nous assemblons 5 triangles. Ceci fait apparaître 6 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 5. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 5, nous mettons 5 triangles. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 6 faces, il faudrait dans ce cas 1 pentagone "à la base". Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle. Ce qui montre que ce cas est impossible.

Cas où il y a 10 arêtes:

a) $A = 10$

b) $S = A - 4$
$S = 10 - 4$
$S = 6$

c) $$\left.\begin{array}{l} M \le 5 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 6 = F_3 + F_4 + F_5 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 20 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \end{array}\right\}$$

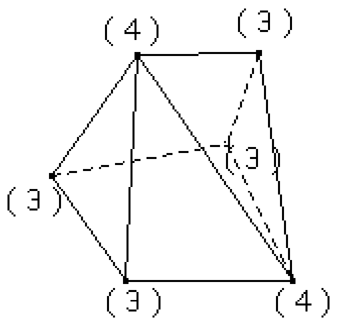
$F_4 + 2\,F_5 = 2$
$\Downarrow$
$F_5 = 0$, $F_4 = 2$ et $F_3 = 4$ (a)
$F_5 = 1$, $F_4 = 0$ et $F_3 = 5$ (b)

d) $$\left.\begin{array}{l} T \le 5 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 6 = S_3 + S_4 + S_5 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 20 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 \end{array}\right\}$$

$S_4 + 2S_5 = 2$
$\Downarrow$
$S_5 = 0$, $S_4 = 2$ et $S_3 = 4$ (1)
$S_5 = 1$, $S_4 = 0$ et $S_3 = 5$ (2)

Les quatre solutions potentielles sont:

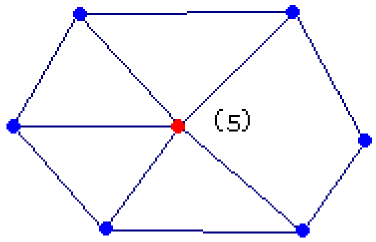
(a)(1) $F_3 = 4$, $F_4 = 2$, $F_5 = 0$
$S_3 = 4$, $S_4 = 2$, $S_5 = 0$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(a)(2) $F_3 = 4$, $F_4 = 2$, $F_5 = 0$
$S_3 = 5$, $S_4 = 0$, $S_5 = 1$
↳ Impossible

On a 4 triangles et 2 quadrilatères à assembler.

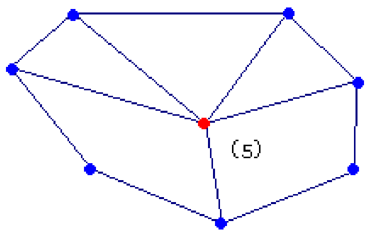
Deux cas sont à analyser:



1°) Au sommet d'ordre 5, nous mettons 4 triangles et 1 quadrilatère, ce qui fait apparaître 7 sommets. Or, nous n'avons que 6 sommets à notre disposition. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 5, nous mettons 4 triangles et 1 quadrilatère. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 6 faces, il faudrait dans ce cas 1 hexagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 quadrilatère. Ce qui montre que ce cas est impossible.

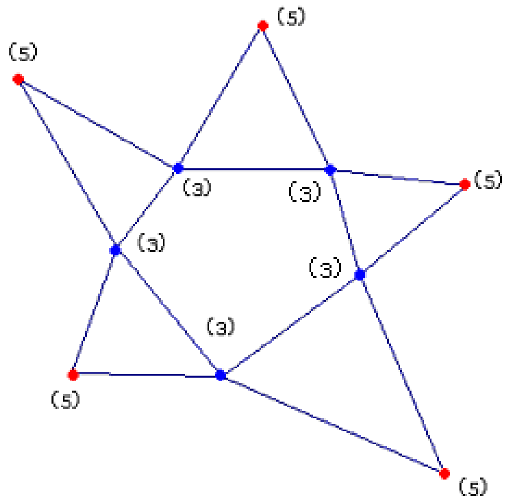


2°) Au sommet d'ordre 5, nous plaçons 3 triangles et 2 quadrilatères, ce qui fait apparaître 8 sommets. Or, nous n'avons que 6 sommets à notre disposition. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

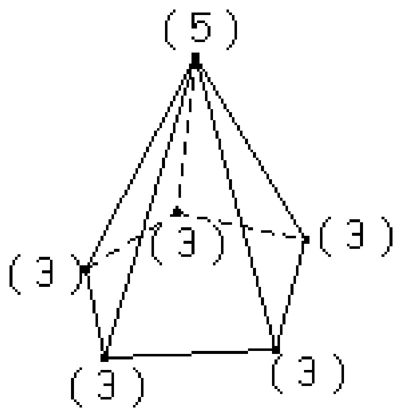
Au sommet d'ordre 5, nous mettons 3 triangles et 2 quadrilatères. Pour refermer ce polyèdre euclidien convexe à 6 faces, il faudrait dans ce cas 1 heptagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne sera pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle. Ce qui montre que ce cas est impossible.

(b)(1) $F_3 = 5, F_4 = 0, F_5 = 1$
$S_3 = 4, S_4 = 2, S_5 = 0$
↳ Impossible



Nous avons 5 triangles et 1 pentagone à assembler. Les triangles "s'accrochent" aux 5 côtés du pentagone. Comme le polyèdre euclidien a 6 faces, on doit le refermer en 1 sommet et il apparaît dès lors 5 sommets d'ordre 3 et 1 sommet d'ordre 5. Ce qui est impossible dans ce cas.

(b)(2) $F_3 = 5, F_4 = 0, F_5 = 1$
$S_3 = 5, S_4 = 0, S_5 = 1$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



Ce polyèdre est une pyramide pentagonale.

- Cas où il y a 11 arêtes:

a) $A = 11$

b) $S = A - 4$
$S = 11 - 4$
$S = 7$

c) $M \leq 5 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 6 = F_3 + F_4 + F_5$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 22 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5$

$F_4 + 2 F_5 = 4$
$\Downarrow$
$F_5 = 0, F_4 = 4$ et $F_3 = 2$ (a)

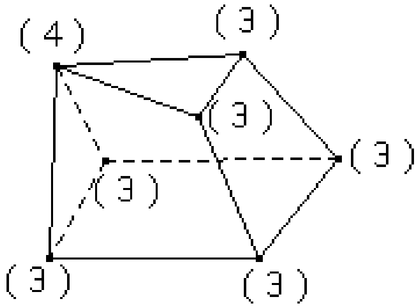
$F_5 = 1, F_4 = 2$ et $F_3 = 3$ (b)

$F_5 = 2, F_4 = 0$ et $F_3 = 4$ (c)

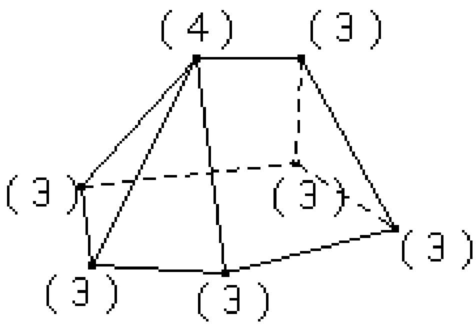
d) $$\left.\begin{array}{l} T \leq 5 \;\Rightarrow\; S = \sum_{i=3}^{T} S_i \;\Rightarrow\; 7 = S_3 + S_4 + S_5 \\ \qquad\;\;\;\;\Rightarrow\; 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \;\Rightarrow\; 22 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_4 + 2S_5 = 1 \\ \Downarrow \\ S_5 = 0,\ S_4 = 1 \text{ et } S_3 = 6\ \ (1) \end{array}$$

Les trois solutions potentielles sont:

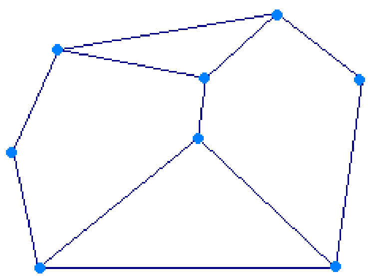
(a)(1) $F_3 = 2$, $F_4 = 4$, $F_5 = 0$
$S_3 = 6$, $S_4 = 1$, $S_5 = 0$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(b)(1) $F_3 = 3$, $F_4 = 2$, $F_5 = 1$
$S_3 = 6$, $S_4 = 1$, $S_5 = 0$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(c)(1) $F_3 = 4$, $F_4 = 0$, $F_5 = 2$
$S_3 = 6$, $S_4 = 1$, $S_5 = 0$
↳ Impossible



Nous avons 4 triangles et 2 pentagones à assembler. Nous assemblons les 2 pentagones avec 2 triangles. Pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 6 faces, il faudrait refermer celui-ci avec 2 quadrilatères. Or, nous ne disposons plus que de 2 triangles. Ce qui montre bien que ce cas est impossible.

Cas où il y a 12 arêtes:

a) $A = 12$

b) $S = A - 4$
$S = 12 - 4$
$S = 8$

c) $M \leq 5 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 6 = F_3 + F_4 + F_5$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 24 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5$

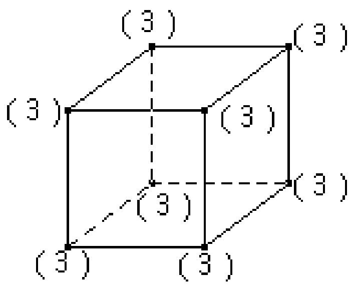
$F_4 + 2F_5 = 6$
$\Downarrow$
$F_5 = 0$, $F_4 = 6$ et $F_3 = 0$ (a)
$F_5 = 1$, $F_4 = 4$ et $F_3 = 1$ (b)
$F_5 = 2$, $F_4 = 2$ et $F_3 = 2$ (c)
$F_5 = 3$, $F_4 = 0$ et $F_3 = 3$ (d)

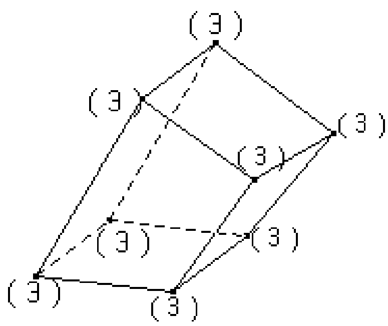
d) $T \leq 5 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 8 = S_3 + S_4 + S_5$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 24 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5$

$S_4 + 2S_5 = 0$
$\Downarrow$
$S_5 = 0$, $S_4 = 0$ et $S_3 = 8$ (1)

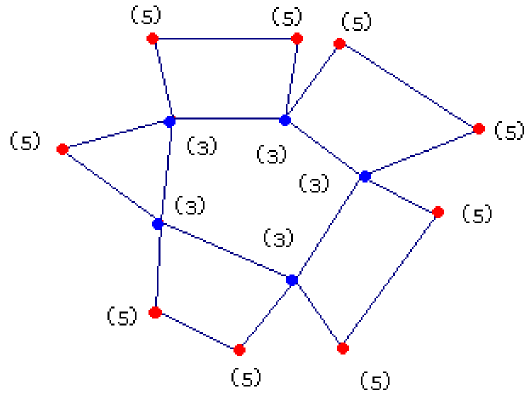
Les quatre solutions potentielles sont:

(a)(1) $F_3 = 0$, $F_4 = 6$, $F_5 = 0$
$S_3 = 8$, $S_4 = 0$, $S_5 = 0$
Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.



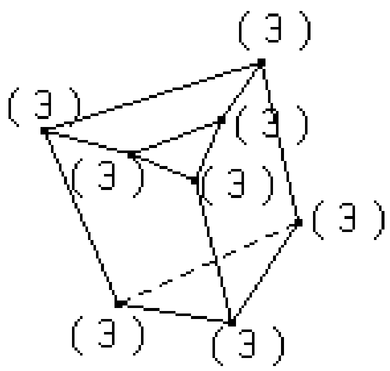


(b)(1) $F_3 = 1, F_4 = 4, F_5 = 1$
$S_3 = 8, S_4 = 0, S_5 = 0$
↳ Impossible

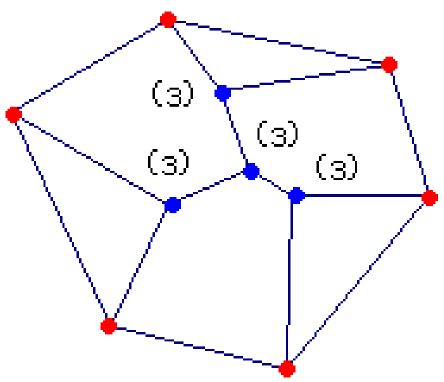


Si nous assemblons au pentagone le triangle et les 4 quadrilatères, il faudrait réunir ces quadrilatères et ce triangle en 1 sommet (ce qui est impossible avec 1 triangle et 4 quadrilatères) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 6 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 5 alors que ce polyèdre n'en possède pas. Dès lors, ce cas est impossible.

(c)(1) $F_3 = 2, F_4 = 2, F_5 = 2$
$S_3 = 8, S_4 = 0, S_5 = 0$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



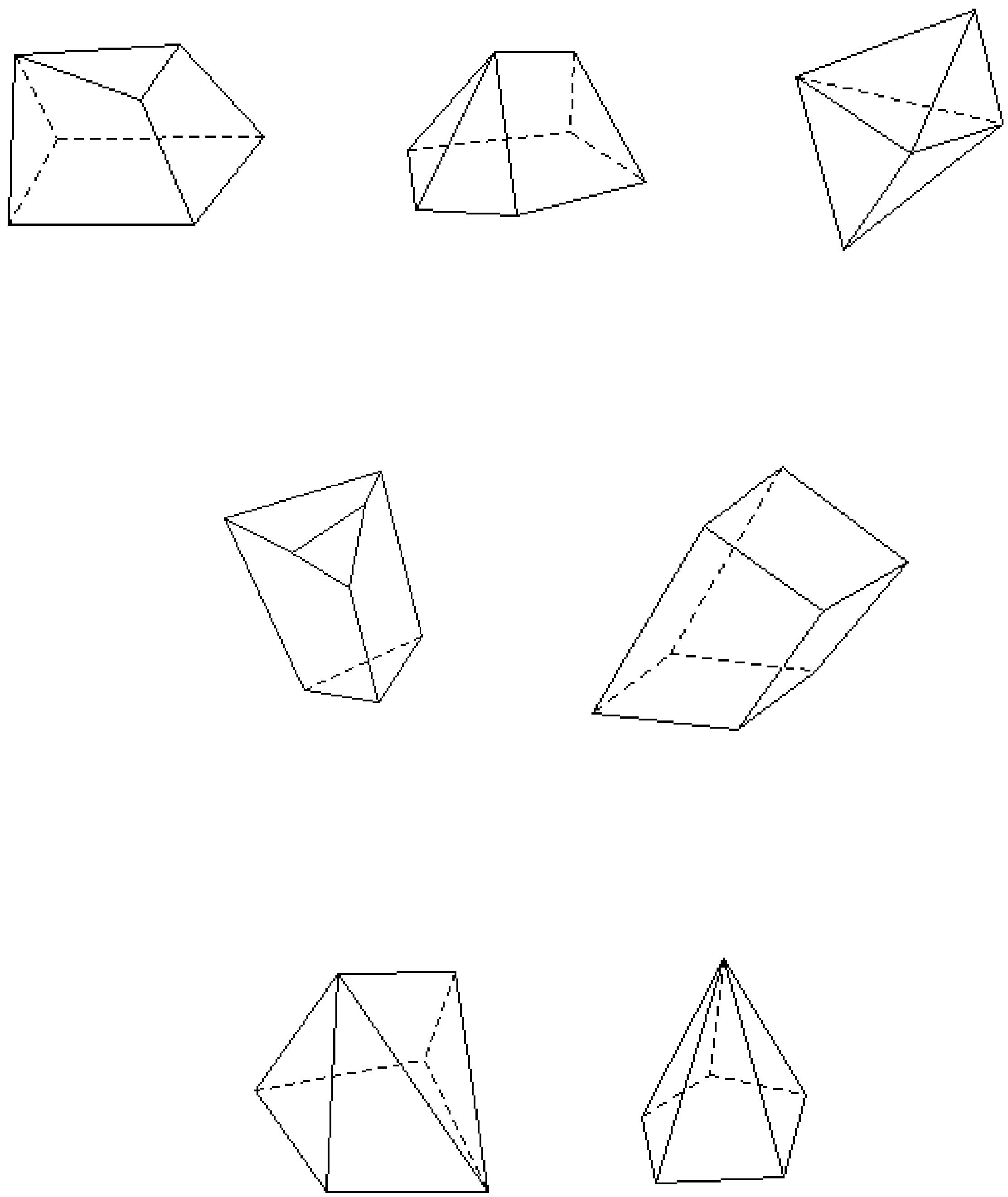
(d)(1) $F_3 = 3, F_4 = 0, F_5 = 3$
$S_3 = 8, S_4 = 0, S_5 = 0$
↳ Impossible



Nous avons 3 triangles et 3 pentagones à notre disposition. Nous assemblons les 3 pentagones et nous complétons avec les 3 triangles pour obtenir des sommets d'ordre 3. Il faudrait une 7ème face (un hexagone) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe, ce qui est en contradiction avec la contrainte des 6 faces.

En conclusion, il y a 7 types de polyèdres euclidiens convexes à 6 faces.

Les 7 types de polyèdres euclidiens convexes à 6 faces



2.5. Les polyèdres euclidiens convexes à 7 faces

Comme le polyèdre euclidien convexe possède 7 faces, il vient que:

1) $F = 7$

2) $S = A - 5$ car:

$$\begin{aligned} F + S - A &= 2 \\ 7 + S - A &= 2 \\ S &= A - 5 \end{aligned}$$

3) $11 \leq A \leq 15$ car:

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A$$
$$A + 6 \leq 21 \leq 2A$$

$$\begin{cases} A + 6 \leq 21 \\ 21 \leq 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 21 - 6 \\ 10{,}5 \leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 15 \\ 10{,}5 \leq A \end{cases}$$

D'où : $11 \leq A \leq 15$

4) M et $T \leq 6$ car:

1° Si M = 7, c'est-à-dire si la face au plus grand nombre de côtés est un 7-gone, le polyèdre euclidien aura au minimum 8 faces. Or, F = 7.

2° Si T = 7, c'est-à-dire si le sommet d'ordre 7 est le sommet dont l'ordre est le plus grand, le polyèdre euclidien possèdera au minimum 8 faces. Or, F = 7.

Détermination des différents types de polyèdres euclidiens convexes à 7 faces:

Lorsque le nombre de faces (F) vaut 7, le nombre d'arêtes est compris entre 11 et 15. La détermination de tous les types de polyèdres euclidiens convexes à 7 faces se fera en analysant les cas où le nombre d'arêtes vaut respectivement 11, 12, 13, 14 et 15.

Cas où il y a 11 arêtes:

a) $A = 11$

b) $S = A - 5$
$S = 11 - 5$
$S = 6$

c)
$$\left.\begin{aligned} M \leq 6 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i &\Rightarrow 7 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i &\Rightarrow 22 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 \end{aligned}\right\} \quad F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 1$$

La détermination des solutions potentielles pour la construction des polyèdres euclidiens convexes à 7 faces requiert l'utilisation de la formule d'analyse combinatoire présentée au lien 1.

Rappel de cette formule: $$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

où K représente le nombre total de combinaisons avec répétitions;
r représente le nombre d'éléments à considérer;
n représente le nombre de groupes dans lesquels on distribue les r éléments.

Au lien 1 se trouve une application de cette formule où il est demandé de donner le nombre total de manières de ranger 14 jouets dans 6 boîtes.

Par analogie avec cet exemple, il s'agit, dans le cas qui nous occupe, de placer 1 élément dans les 3 termes d'une somme et, de plus, de déterminer le nombre total de combinaisons avec répétitions permettant l'identification des différents types de polyèdres euclidiens convexes à 7 faces.

Dans le cas qui nous occupe, r = 1 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^1 = \frac{(1+3-1)!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$

Ecrivons ces 3 possibilités: $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 1$

F_4	$2F_5$	$3F_6$	
~~0~~	~~0~~	~~1~~	(a)
~~0~~	~~1~~	~~0~~	(b)
1	0	0	(c)

Pourquoi avoir supprimé la possibilité (a)?

Si $F_4 = 0$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3F_6 = 1 \\ F_6 = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 1$

$F_6 = \frac{1}{3}$ est impossible car le nombre de faces est obligatoirement un nombre naturel!

Pourquoi avoir supprimé la possibilité (b)?

Si $F_4 = 0$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2F_5 = 1 \\ F_5 = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 1$

$F_5 = \frac{1}{2}$ est impossible car le nombre de faces est obligatoirement un nombre naturel!

Quelles sont les solutions à considérer pour les faces?

(c) Si $F_4 = 1$; $2F_5 = 0$ et $3F_6 = 0$, alors $F_3 = 6$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 6$ et $F_4 = 1$** est une solution potentielle.

d) $T \leq 6 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 6 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 22 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6$

$$\left.\begin{array}{l} 6 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 \\ 22 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 \end{array}\right\} S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 4$$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de combinaisons avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

où K représente le nombre total de combinaisons avec répétitions;
r représente le nombre d'éléments à considérer;
n représente le nombre de groupes dans lesquels on distribue les r éléments.

Dans le cas qui nous occupe, r = 4 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^4 = \frac{(4+3-1)!}{4!(3-1)!} = \frac{6!}{4!2!} = 15$

Ecrivons ces 15 possibilités: $S_4 \quad + \quad 2S_5 \quad + \quad 3S_6 \quad = \quad 4$

S_4	$2S_5$	$3S_6$	
4	0	0	(1)
~~3~~	~~1~~	~~0~~	(2)
~~3~~	~~0~~	~~1~~	(3)
2	2	0	(4)
~~2~~	~~0~~	~~2~~	(5)
~~2~~	~~1~~	~~1~~	(6)
~~1~~	~~3~~	~~0~~	(7)
1	0	3	(8)
~~1~~	~~2~~	~~1~~	(9)
~~1~~	~~1~~	~~2~~	(10)
0	4	0	(11)
~~0~~	~~3~~	~~1~~	(12)
~~0~~	~~1~~	~~3~~	(13)
~~0~~	~~2~~	~~2~~	(14)
~~0~~	~~0~~	~~4~~	(15)

Pourquoi avoir supprimé la possibilité (2)?

Si $S_4 = 3$ et $3S_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2S_5 = 1 \\ S_5 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ car $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 4$

$S_5 = \dfrac{1}{2}$ est impossible car le nombre de faces est obligatoirement un nombre naturel!

Remarque: les autres solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même manière.

Quelles sont les solutions à considérer pour les sommets?

(1) Si $S_4 = 4$; $2S_5 = 0$ et $3S_6 = 0$, alors $S_3 = 2$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 6$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 2$ et $S_4 = 4$** est une solution potentielle.

(4) Si $S_4 = 2$ et $3S_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2S_5 = 2 \\ S_5 = 1 \end{array}\right\}$ car $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 4$

De là, on conclut que $S_3 = 3$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 6$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 3$ et $S_4 = 2$ et $S_5 = 1$** est une solution potentielle.

(8) Si $S_4 = 1$ et $2S_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3S_6 = 3 \\ S_6 = 1 \end{array}\right\}$ car $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 4$

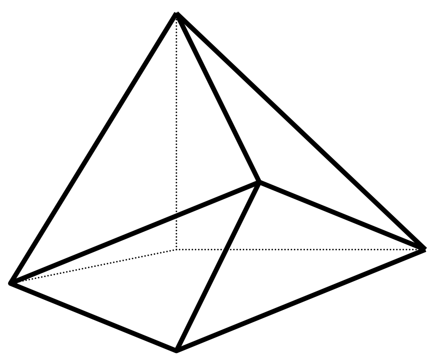
De là, on conclut que $S_3 = 4$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 6$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 4$ et $S_4 = 1$ et $S_6 = 1$** est une solution potentielle.

(11) Si $S_4 = 0$ et $3S_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2S_5 = 4 \\ S_5 = 2 \end{array}\right\}$ car $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 4$

De là, on conclut que $S_3 = 4$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 6$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 4$ et $S_5 = 2$** est une solution potentielle.

Les quatre solutions potentielles sont:

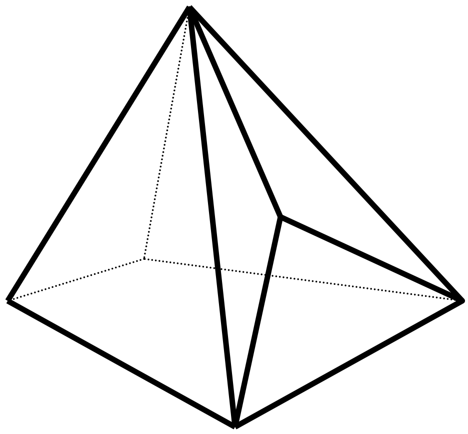
(c)(1) $F_3 = 6$ et $F_4 = 1$
$S_3 = 2$ et $S_4 = 4$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(c)(4) $F_3 = 6$ et $F_4 = 1$

$S_3 = 3$ et $S_4 = 2$ et $S_5 = 1$

↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



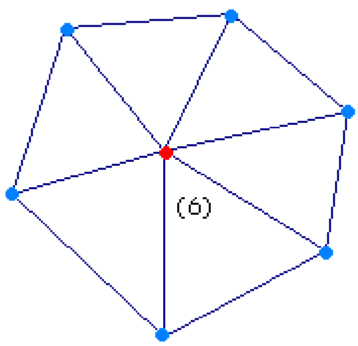
(c)(8) $F_3 = 6$ et $F_4 = 1$

$S_3 = 4$ et $S_4 = 1$ et $S_6 = 1$

↳ Impossible

On a 6 triangles et 1 quadrilatère à assembler.

Deux cas sont à analyser:



1°) Au sommet d'ordre 6, nous assemblons 6 triangles. Ceci fait apparaître 7 sommets alors que nous n'avons que 6 sommets à notre disposition. Ce qui montre que ce cas est impossible.

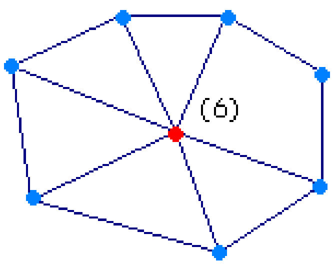
OU

Si nous assemblons les 6 triangles ensemble, il faudrait 1 hexagone "à la base" pour refermer le polyèdre euclidien convexe. Or, il ne nous reste qu'1 quadrilatère. Ceci montre bien que ce cas est impossible.

2°) Au sommet d'ordre 6, nous mettons 5 triangles et 1 quadrilatère. Ceci fait apparaître 8 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 7. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 6, nous mettons 5 triangles et 1 quadrilatère. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 heptagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle. Ce qui montre que ce cas est impossible.



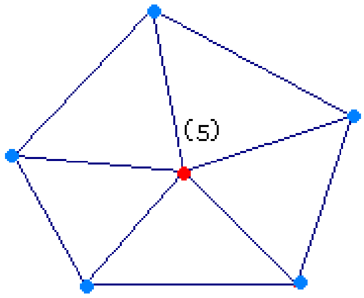
(c)(11) $F_3 = 6$ et $F_4 = 1$

$S_3 = 4$ et $S_5 = 2$

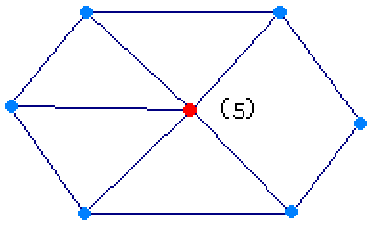
↳ Impossible

On a 6 triangles et 1 quadrilatère à assembler.

Deux cas sont à analyser:



1°) Au sommet d'ordre 5, on assemble 5 triangles. Pour former le second sommet d'ordre 5, il manque 3 faces. Cependant, il ne nous reste qu'1 triangle et 1 quadrilatère à notre disposition. Ceci montre bien que ce cas est impossible.



2°) Au sommet d'ordre 5, nous mettons 4 triangles et 1 quadrilatère. Ceci fait apparaître 7 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 6. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 5, nous mettons 4 triangles et 1 quadrilatère. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 hexagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que de 2 triangles. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 5, on assemble 4 triangles et 1 quadrilatère. Pour former le second sommet d'ordre 5, il manque 3 faces. Cependant, il ne reste que 2 triangles à notre disposition. Ce qui montre bien que ce cas est impossible.

Cas où il y a 12 arêtes:

a) $A = 12$

b) $S = A - 5$
$S = 12 - 5$
$S = 7$

c)
$$\left.\begin{aligned} M \leq 6 \;\Rightarrow\; F = \sum_{i=3}^{M} F_i \quad &\Rightarrow\; 7 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \\ \Rightarrow\; 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \quad &\Rightarrow\; 24 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 \end{aligned}\right\} \quad F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 3$$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de combinaisons avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Dans le cas qui nous occupe, r = 3 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^3 = \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

Ecrivons ces 10 possibilités: $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 3$

F_4	$2F_5$	$3F_6$	
3	0	0	(a)
~~2~~	~~1~~	~~0~~	(b)
~~2~~	~~0~~	~~1~~	(c)
1	2	0	(d)
~~1~~	~~0~~	~~2~~	(e)
~~1~~	~~1~~	~~1~~	(f)
~~0~~	~~3~~	~~0~~	(g)
0	0	3	(h)
~~0~~	~~2~~	~~1~~	(i)
~~0~~	~~1~~	~~2~~	(j)

Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y a 11 arêtes.

Quelles sont les solutions à considérer pour les faces?

(a) Si $F_4 = 3$; $2F_5 = 0$ et $3F_6 = 0$, alors $F_3 = 4$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 4$ et $F_4 = 3$** est une solution potentielle.

(d) Si $F_4 = 1$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2F_5 = 2 \\ F_5 = 1 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 3$

De là, on conclut que $F_3 = 5$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 5$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 1$** est une solution potentielle.

(h) Si $F_4 = 0$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3F_6 = 3 \\ F_6 = 1 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 3$

De là, on conclut que $F_3 = 6$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 6$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{d)} \quad T \le 6 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i & \Rightarrow 7 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i & \Rightarrow 24 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 \end{array}\right\} S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 3$$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de permutations avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $K_n^r = \dfrac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$

Dans le cas qui nous occupe, r = 3 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^3 = \dfrac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$

Ecrivons ces 10 possibilités: $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 3$

S_4	$2S_5$	$3S_6$	
3	0	0	(1)
~~2~~	~~1~~	~~0~~	(2)
~~2~~	~~0~~	~~1~~	(3)
1	2	0	(4)
~~1~~	~~0~~	~~2~~	(5)
~~1~~	~~1~~	~~1~~	(6)
~~0~~	~~3~~	~~0~~	(7)
0	0	3	(8)
~~0~~	~~2~~	~~1~~	(9)
~~0~~	~~1~~	~~2~~	(10)

Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y a 11 arêtes.

Quelles sont les solutions à considérer pour les sommets?

(1) Si $S_4 = 3$; $2S_5 = 0$ et $3S_6 = 0$, alors $S_3 = 4$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 4$ et $S_4 = 3$** est une solution potentielle.

(4) Si $S_4 = 1$ et $3S_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{l} 2S_5 = 2 \\ S_5 = 1 \end{array}\right\}$ car $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 3$

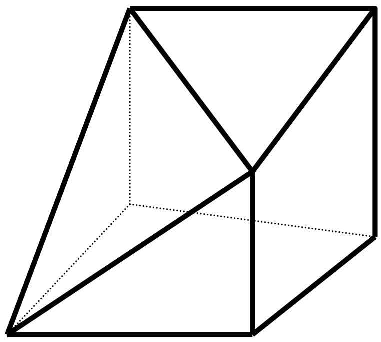
De là, on conclut que $S_3 = 5$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6. = 7$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 5$ et $S_4 = 1$ et $S_5 = 1$** est une solution potentielle.

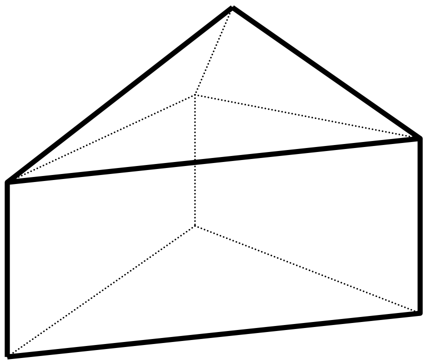
(8) Si $S_4 = 0$ et $2S_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3S_6 = 3 \\ S_6 = 1 \end{array}\right\}$ car $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 3$

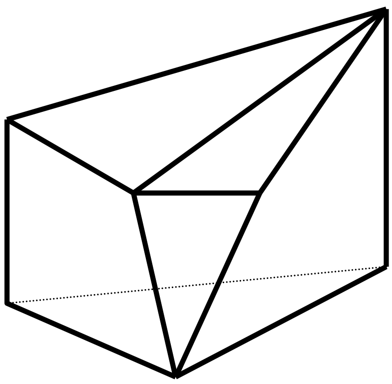
De là, on conclut que $S_3 = 6$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 6$ et $S_6 = 1$** est une solution potentielle.

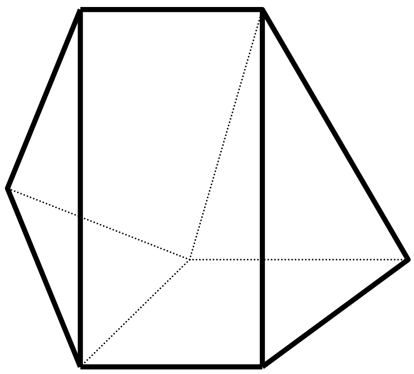
Les neuf solutions potentielles sont:

(a)(1) $F_3 = 4$ et $F_4 = 3$
$S_3 = 4$ et $S_4 = 3$
↳ Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.

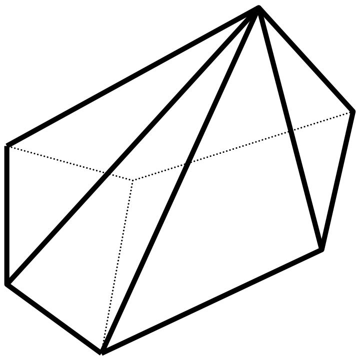








(a)(4) $F_3 = 4$ et $F_4 = 3$
$S_3 = 5$ et $S_4 = 1$ et $S_5 = 1$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



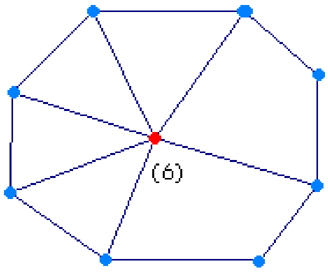
(a)(8) $F_3 = 4$ et $F_4 = 3$

$S_3 = 6$ et $S_6 = 1$

↳ Impossible

On a 4 triangles et 3 quadrilatères à assembler.

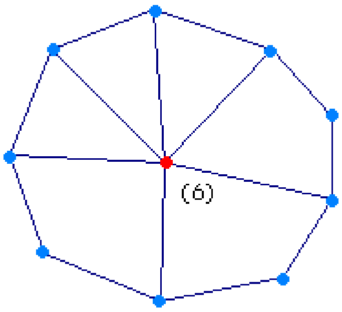
Deux cas sont à analyser:



1°) Au sommet d'ordre 6, nous mettons 4 triangles et 2 quadrilatères. Ceci fait apparaître 9 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 7. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 6, nous mettons 4 triangles et 2 quadrilatères. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 octogone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 quadrilatère. Ce qui montre que ce cas est impossible.



2°) Au sommet d'ordre 6, nous mettons 3 triangles et 3 quadrilatères. Ceci fait apparaître 10 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 7. Ce qui montre que ce cas est impossible.

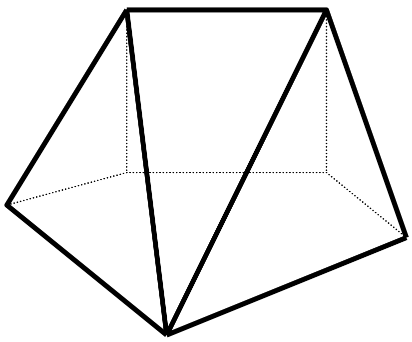
OU

Au sommet d'ordre 6, nous mettons 3 triangles et 3 quadrilatères. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 ennéagone « à la base » (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle. Ce qui montre que ce cas est impossible.

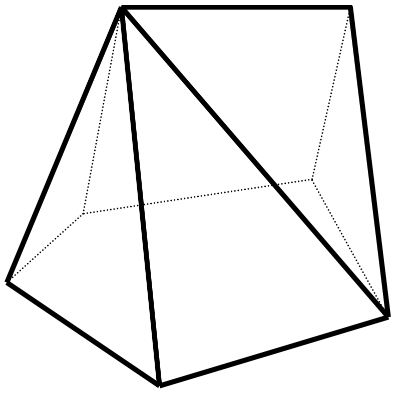
(d)(1) $F_3 = 5$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 1$

$S_3 = 4$ et $S_4 = 3$

↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



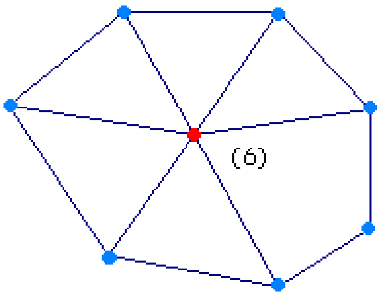
(d)(4) $F_3 = 5$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 1$
$S_3 = 5$ et $S_4 = 1$ et $S_5 = 1$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(d)(8) $F_3 = 5$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 1$
$S_3 = 6$ et $S_6 = 1$
↳ Impossible

On a 5 triangles, 1 quadrilatère et 1 pentagone à assembler.

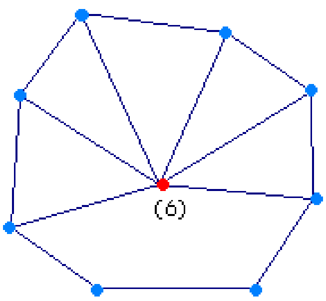
Trois cas sont à analyser:



1°) Au sommet d'ordre 6, nous mettons 5 triangles et 1 quadrilatère. Ceci fait apparaître 8 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 7. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

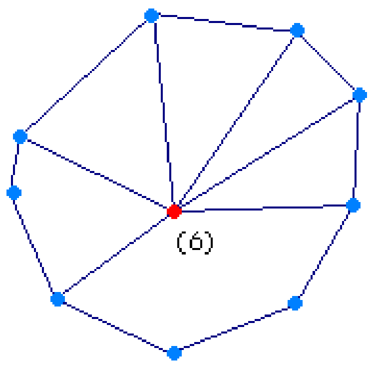
Au sommet d'ordre 6, nous mettons 5 triangles et 1 quadrilatère. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 heptagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 pentagone. Ce qui montre que ce cas est impossible.



2°) Au sommet d'ordre 6, nous mettons 5 triangles et 1 pentagone. Ceci fait apparaître 9 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 7. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 6, nous mettons 5 triangles et 1 pentagone. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 octogone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 quadrilatère. Ce qui montre que ce cas est impossible.



3°) Au sommet d'ordre 6, nous assemblons 4 triangles, 1 quadrilatère et 1 pentagone. Ceci fait apparaître 10 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 7. Ce qui montre que ce cas est impossible.

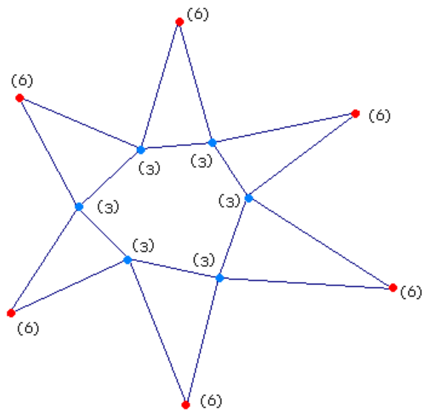
OU

Au sommet d'ordre 6, nous mettons 4 triangles, 1 quadrilatère et 1 pentagone. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 ennéagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle. Ce qui montre que ce cas est impossible.

(h)(1) $F_3 = 6$ et $F_6 = 1$

$S_3 = 4$ et $S_4 = 3$

↳ Impossible

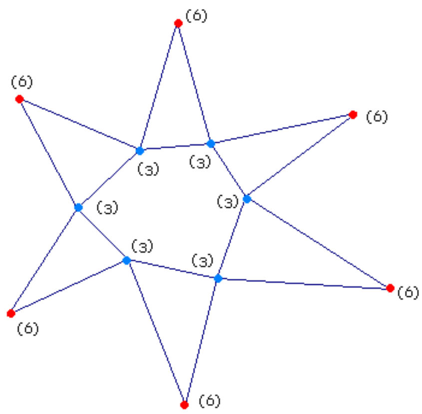


Nous avons 6 triangles et 1 hexagone à assembler. Les triangles "s'accrochent" aux 6 côtés de l'hexagone. Comme le polyèdre euclidien convexe a 7 faces, on doit le refermer en 1 sommet et il apparaît, dès lors, 6 sommets d'ordre 3 et 1 sommet d'ordre 6. Ce qui est impossible dans ce cas.

(h)(4) $F_3 = 6$ et $F_6 = 1$

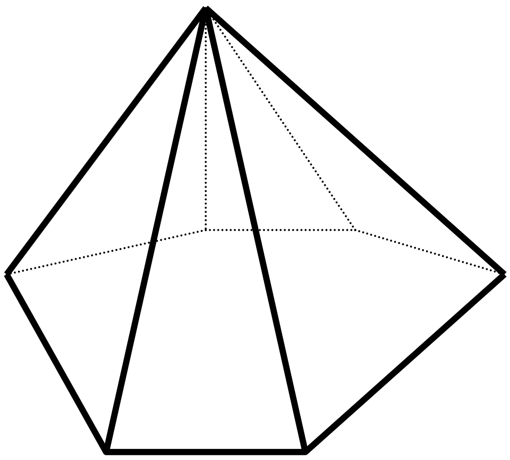
$S_3 = 5$ et $S_4 = 1$ et $S_5 = 1$

↳ Impossible



Nous avons 6 triangles et 1 hexagone à assembler. Les triangles "s'accrochent" aux 6 côtés de l'hexagone. Comme le polyèdre euclidien convexe a 7 faces, on doit le refermer en 1 sommet et il apparaît, dès lors 6 sommets d'ordre 3 et 1 sommet d'ordre 6. Ce qui est impossible dans ce cas.

(h)(8) $F_3 = 6$ et $F_6 = 1$
$S_3 = 6$ et $S_6 = 1$
Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



Ce polyèdre est une pyramide hexagonale.

Cas où il y a 13 arêtes:

a) A = 13

b) S = A – 5
S = 13 – 5
S = 8

c) $M \leq 6 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 7 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 26 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6$

$\Big\}\ F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 5$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de permutations avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $K_n^r = \dfrac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$

Dans le cas qui nous occupe, r = 5 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^5 = \dfrac{(5+3-1)!}{5!(3-1)!} = \dfrac{7!}{5!2!} = 21$

Ecrivons ces 21 possibilités: $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 5$

F_4	$2F_5$	$3F_6$	
5	0	0	(a)
~~4~~	~~1~~	~~0~~	(b)
~~4~~	~~0~~	~~1~~	(c)
3	2	0	(d)
~~3~~	~~0~~	~~2~~	(e)
~~3~~	~~1~~	~~1~~	(f)
~~2~~	~~3~~	~~0~~	(g)
2	0	3	(h)
~~2~~	~~2~~	~~1~~	(i)
~~2~~	~~1~~	~~2~~	(j)
1	4	0	(k)
~~1~~	~~0~~	~~4~~	(l)
~~1~~	~~3~~	~~1~~	(m)
~~1~~	~~1~~	~~3~~	(n)
~~1~~	~~2~~	~~2~~	(o)
~~0~~	~~5~~	~~0~~	(p)
~~0~~	~~0~~	~~5~~	(q)
~~0~~	~~4~~	~~1~~	(r)
~~0~~	~~1~~	~~4~~	(s)
~~0~~	~~3~~	~~2~~	(t)
0	2	3	(u)

Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y 11 a arêtes.

Quelles sont les solutions à considérer pour les faces?

(a) Si $F_4 = 5$; $2F_5 = 0$ et $3F_6 = 0$, alors $F_3 = 2$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 2$ et $F_4 = 5$** est une solution potentielle.

(d) Si $F_4 = 3$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2F_5 = 2 \\ F_5 = 1 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 5$

De là, on conclut que $F_3 = 3$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 3$ et $F_4 = 3$ et $F_5 = 1$** est une solution potentielle.

(h) Si $F_4 = 2$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3F_6 = 3 \\ F_6 = 1 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 5$

De là, on conclut que $F_3 = 4$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 4$ et $F_4 = 2$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

(k) Si $F_4 = 1$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2F_5 = 4 \\ F_5 = 2 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 5$

De là, on conclut que $F_3 = 4$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 4$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 2$** est une solution potentielle.

(u) Si $F_4 = 0$; $2F_5 = 2$ et $3F_6 = 3$
$F_5 = 1$ $F_6 = 1$ alors $F_3 = 5$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.

Dès lors, la solution **$F_3 = 5$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

d) $T \leq 6 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 8 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 26 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6$
$\Big\}$ $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 2$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de permutations avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Dans le cas qui nous occupe, r = 2 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^2 = \frac{(2+3-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Ecrivons ces 6 possibilités: $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 2$

S_4	$2S_5$	$3S_6$	
2	0	0	(1)
~~1~~	~~1~~	~~0~~	(2)
~~1~~	~~0~~	~~1~~	(3)
0	2	0	(4)
~~0~~	~~0~~	~~2~~	(5)
~~0~~	~~1~~	~~1~~	(6)

Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y a 11 arêtes.

Quelles sont les solutions à considérer pour les sommets?

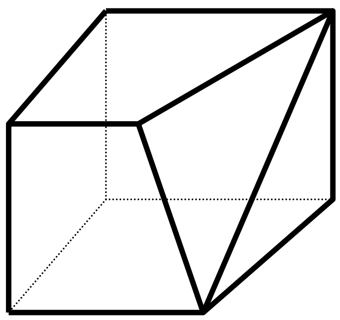
(1) Si $S_4 = 2$; $2S_5 = 0$ et $3S_6 = 0$; alors $S_3 = 6$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 8$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 6$ et $S_4 = 2$** est une solution potentielle.

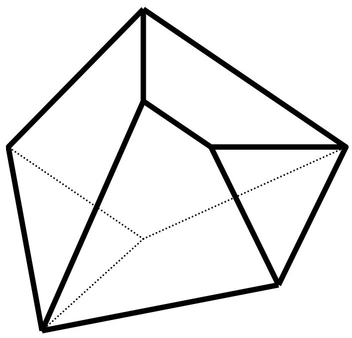
(4) Si $S_4 = 0$ et $3S_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3S_5 = 2 \\ S_5 = 1 \end{array}\right\}$ car $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 2$

De là, on conclut que $S_3 = 7$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 8$.
Dès lors, la solution **$S_3 = 7$ et $S_5 = 1$** est une solution potentielle.

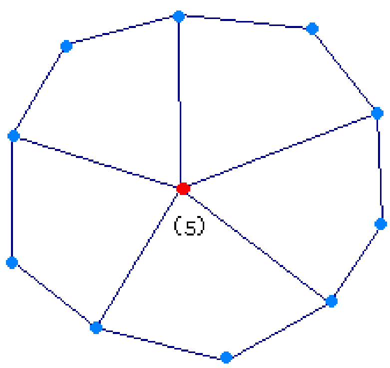
Les dix solutions potentielles sont:

(a)(1) $F_3 = 2$ et $F_4 = 5$
$S_3 = 6$ et $S_4 = 2$
➪ Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.





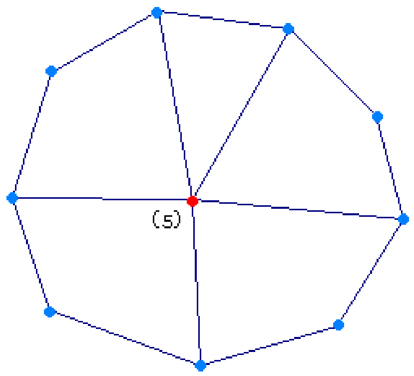
(a)(4) $F_3 = 2$ et $F_4 = 5$
$S_3 = 7$ et $S_5 = 1$
➪ Impossible
On a 2 triangles et 5 quadrilatères à assembler.
Trois cas sont à analyser:



1°) Au sommet d'ordre 5, nous assemblons 5 quadrilatères. Ceci fait apparaître 11 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 8. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

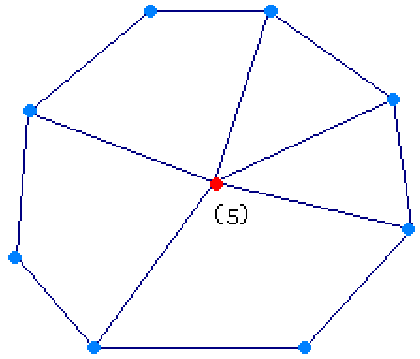
Au sommet d'ordre 5, nous mettons 5 quadrilatères. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 décagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que de 2 triangles. Ceci montre que ce cas est impossible.



2°) Au sommet d'ordre 5, nous assemblons 1 triangle et 4 quadrilatères. Ceci fait apparaître 10 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 8. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 5, nous mettons 1 triangle et 4 quadrilatères. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 ennéagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle et 1 quadrilatère. Ceci montre que ce cas est impossible.



3°) Au sommet d'ordre 5, nous mettons 2 triangles et 3 quadrilatères. Ceci fait apparaître 9 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 8. Ce qui montre que ce cas est impossible.

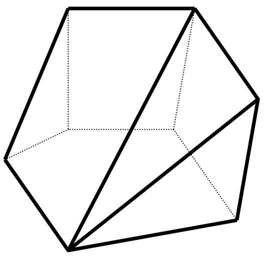
OU

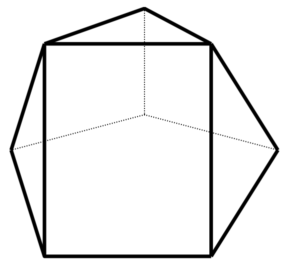
Au sommet d'ordre 5, nous assemblons 2 triangles et 3 quadrilatères. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait, dans ce cas, 1 octogone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que de 2 quadrilatères. Ceci montre que ce cas est impossible.

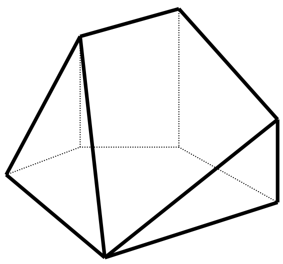
(d)(1) $F_3 = 3$ et $F_4 = 3$ et $F_5 = 1$

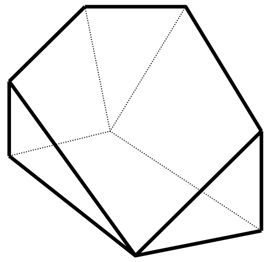
$S_3 = 6$ et $S_4 = 2$

↳ Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.

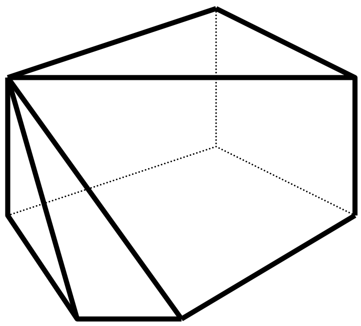




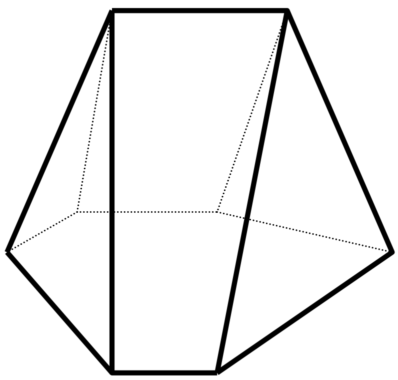




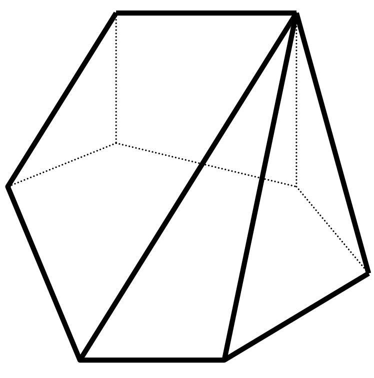
(d)(4) $F_3 = 3$ et $F_4 = 3$ et $F_5 = 1$
$S_3 = 7$ et $S_5 = 1$
➪ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(h)(1) $F_3 = 4$ et $F_4 = 2$ et $F_6 = 1$
$S_3 = 6$ et $S_4 = 2$
➪ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



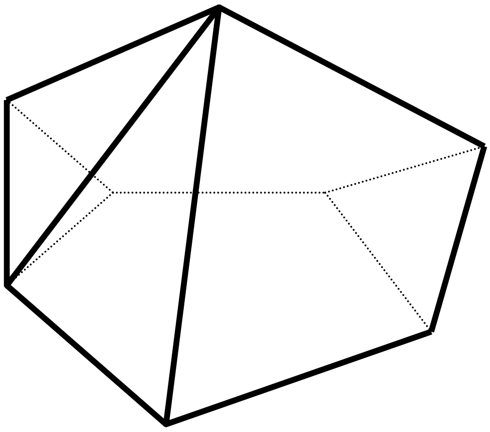
(h)(4) $F_3 = 4$ et $F_4 = 2$ et $F_6 = 1$
$S_3 = 7$ et $S_5 = 1$
➪ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.

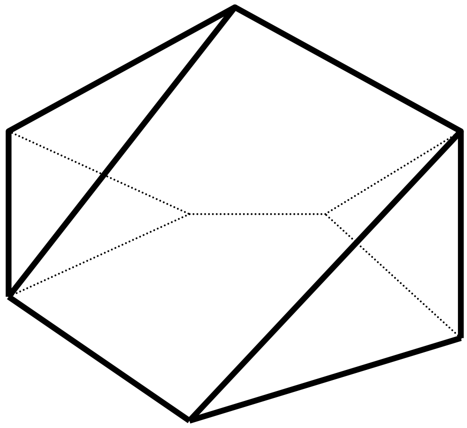


(k)(1) $F_3 = 4$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 2$

$S_3 = 6$ et $S_4 = 2$

↳ Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.





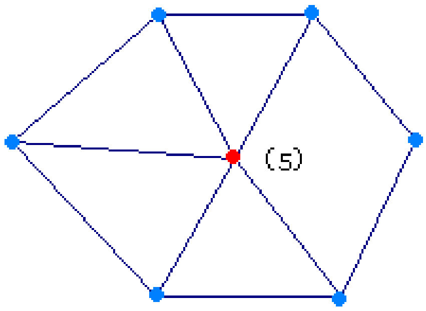
(k)(4) $F_3 = 4$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 2$

$S_3 = 7$ et $S_5 = 1$

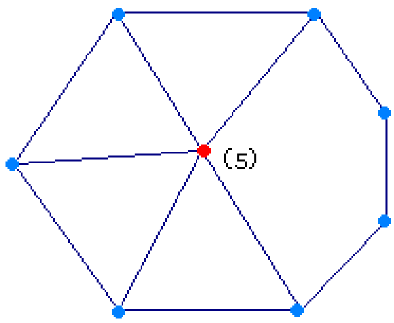
↳ Impossible

On a 4 triangles, 1 quadrilatère et 2 pentagones à assembler.

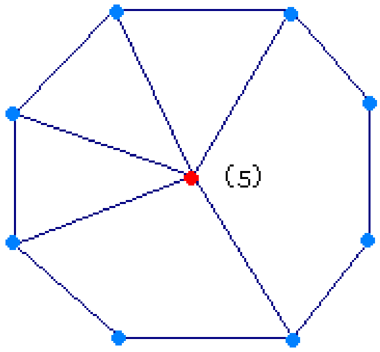
Quatre cas sont à analyser:



1°) Au sommet d'ordre 5, nous assemblons 4 triangles et 1 quadrilatère. Ceci fait apparaître 7 des 8 sommets de ce polyèdre. Nous sommes donc contraints de le refermer en 1 sommet (d'ordre 3), ce qui est impossible avec 2 pentagones car il arrive au minimum 3 faces en 1 sommet dans tout polyèdre euclidien. Ce qui montre que ce cas est impossible.



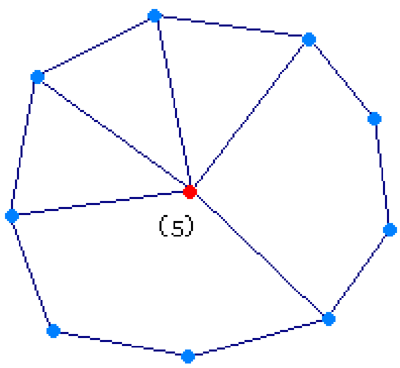
2°) Au sommet d'ordre 5, nous mettons 4 triangles et 1 pentagone, ce qui fait apparaître 8 sommets. Pour refermer ce polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait 1 heptagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 quadrilatère et d'1 pentagone qui ne peuvent en aucun cas être dans le même plan. Il nous faudrait donc 1 sommet supplémentaire pour refermer ce polyèdre alors que la totalité de ceux-ci ont été utilisés. Ceci montre que ce cas est impossible.



3°) Au sommet d'ordre 5, nous mettons 3 triangles, 1 quadrilatère et 1 pentagone. Ceci fait apparaître 9 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 8. Ce qui montre que ce cas est impossible.

OU

Au sommet d'ordre 5, nous assemblons 3 triangles, 1 quadrilatère et 1 pentagone. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 octogone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle et d'1 pentagone. Ceci montre que ce cas est impossible.



4°) Au sommet d'ordre 5, nous mettons 3 triangles et 2 pentagones. Ceci fait apparaître 10 sommets alors que ce polyèdre euclidien convexe n'en possède que 8. Ce qui montre que ce cas est impossible.

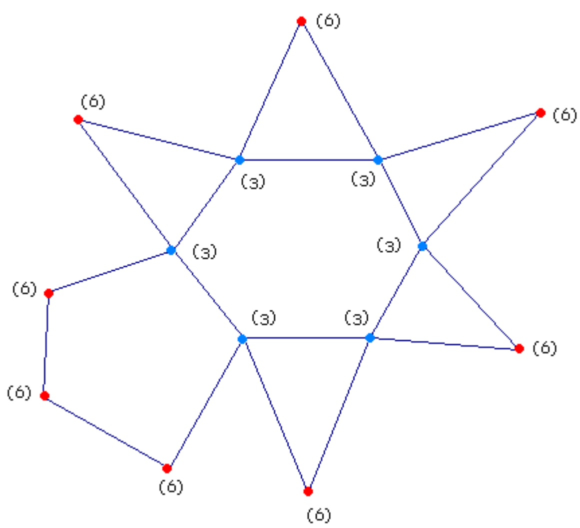
OU

Au sommet d'ordre 5, nous assemblons 3 triangles et 2 pentagones. Pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 ennéagone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que d'1 triangle et d'1 quadrilatère. Ceci montre que ce cas est impossible.

(u)(1) $F_3 = 5$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 1$

$S_3 = 6$ et $S_4 = 2$

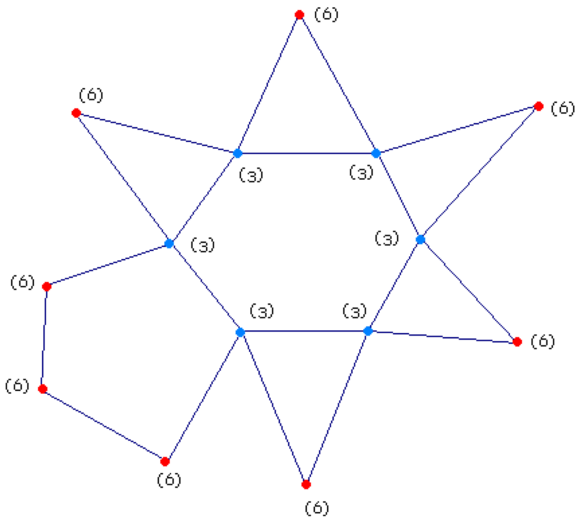
↳ Impossible



Si nous assemblons à l'hexagone les 5 triangles et le pentagone, il faudrait réunir ces triangles et ce pentagone en 1 sommet (ce qui est impossible avec 5 triangles et 1 pentagone) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède pas. Dès lors, ce cas est impossible.

$S_3 = 7$ et $S_5 = 1$

↳ Impossible



Si nous assemblons à l'hexagone les 5 triangles et le pentagone, il faudrait réunir ces triangles et ce pentagone en 1 sommet (ce qui est impossible avec 5 triangles et 1 pentagone) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède pas. Dès lors, ce cas est impossible.

Cas où il y a 14 arêtes:

a) $A = 14$

b) $S = A - 5$
$S = 14 - 5$
$S = 9$

c) $M \leq 6 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 7 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 28 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6$

$\Big\}\ F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 7$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de permutations avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Dans le cas qui nous occupe, r = 7 et n = 3.

Nombre de possibilités: $$K_3^7 = \frac{(7+3-1)!}{7!(3-1)!} = \frac{9!}{7!2!} = 36$$

Ecrivons ces 36 possibilités: $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 7$

F_4	$2F_5$	$3F_6$	
7	0	0	(a)
~~6~~	~~1~~	~~0~~	(b)
~~6~~	~~0~~	~~1~~	(c)
5	2	0	(d)
~~5~~	~~0~~	~~2~~	(e)
~~5~~	~~1~~	~~1~~	(f)
~~4~~	~~3~~	~~0~~	(g)
4	0	3	(h)
~~4~~	~~2~~	~~1~~	(i)
~~4~~	~~1~~	~~2~~	(j)
3	4	0	(k)
~~3~~	~~0~~	~~4~~	(l)
~~3~~	~~3~~	~~1~~	(m)
~~3~~	~~1~~	~~3~~	(n)
~~3~~	~~2~~	~~2~~	(o)
~~2~~	~~5~~	~~0~~	(p)
~~2~~	~~0~~	~~5~~	(q)
~~2~~	~~4~~	~~1~~	(r)
~~2~~	~~1~~	~~4~~	(s)
~~2~~	~~3~~	~~2~~	(t)
2	2	3	(u)
1	6	0	(v)
1	0	6	(w)
~~1~~	~~5~~	~~1~~	(x)
~~1~~	~~1~~	~~5~~	(y)
~~1~~	~~4~~	~~2~~	(z)
~~1~~	~~2~~	~~4~~	(α)
~~1~~	~~3~~	~~3~~	(β)
~~0~~	~~7~~	~~0~~	(γ)
~~0~~	~~0~~	~~7~~	(δ)
~~0~~	~~6~~	~~1~~	(ε)
~~0~~	~~1~~	~~6~~	(ζ)
~~0~~	~~5~~	~~2~~	(η)
~~0~~	~~2~~	~~5~~	(θ)
0	4	3	(ι)
~~0~~	~~3~~	~~4~~	(κ)

Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y a 11 arêtes.

Quelles sont les solutions à considérer pour les faces?

(a) Si $F_4 = 7$; $2F_5 = 0$ et $3F_6 = 0$, alors $F_3 = 0$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_4 = 7$** est une solution potentielle.

(d) Si $F_4 = 5$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{aligned} 2F_5 &= 2 \\ F_5 &= 1 \end{aligned}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 7$

De là, on conclut que $F_3 = 1$ car $7 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 1$ et $F_4 = 5$ et $F_5 = 1$** est une solution potentielle.

(h) Si $F_4 = 4$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{aligned} 3F_6 &= 3 \\ F_6 &= 1 \end{aligned}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 7$

De là, on conclut que $F_3 = 2$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 2$ et $F_4 = 4$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

(k) Si $F_4 = 3$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{aligned} 2F_5 &= 4 \\ F_5 &= 2 \end{aligned}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 7$

De là, on conclut que $F_3 = 2$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 2$ et $F_4 = 3$ et $F_5 = 2$** est une solution potentielle.

(u) Si $F_4 = 2$; $\begin{aligned} 2F_5 &= 2 \\ F_5 &= 1 \end{aligned}$ et $\begin{aligned} 3F_6 &= 3 \\ F_6 &= 1 \end{aligned}$ alors $F_3 = 3$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 3$ et $F_4 = 2$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

(v) Si $F_4 = 1$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{aligned} 2F_5 &= 6 \\ F_5 &= 3 \end{aligned}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 7$

De là, on conclut que $F_3 = 3$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 3$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 3$** est une solution potentielle.

(w) Si $F_4 = 1$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{aligned} 3F_6 &= 6 \\ F_6 &= 2 \end{aligned}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 7$

De là, on conclut que $F_3 = 4$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 4$ et $F_4 = 1$ et $F_6 = 2$** est une solution potentielle.

(ι) Si $F_4 = 0$; $\begin{aligned} 2F_5 &= 4 \\ F_5 &= 2 \end{aligned}$ et $\begin{aligned} 3F_6 &= 3 \\ F_6 &= 1 \end{aligned}$ alors $F_3 = 4$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 4$ et $F_5 = 2$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

d) $$\left.\begin{aligned} T \leq 6 \quad &\Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \quad \Rightarrow 9 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 \\ &\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \quad \Rightarrow 28 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 \end{aligned}\right\} \quad S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 1$$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de permutations avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Dans le cas qui nous occupe, r = 1 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^1 = \frac{(1+3-1)!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$

Ecrivons ces 3 possibilités: $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 1$

S_4	$2S_5$	$3S_6$	
1	0	0	(1)
~~0~~	~~1~~	~~0~~	(2)
~~0~~	~~0~~	~~1~~	(3)

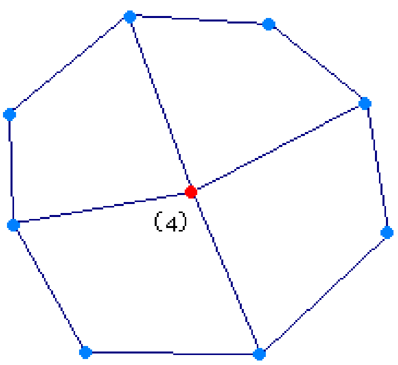
Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y a 11 arêtes.

Quelles sont les solutions à considérer pour les sommets?

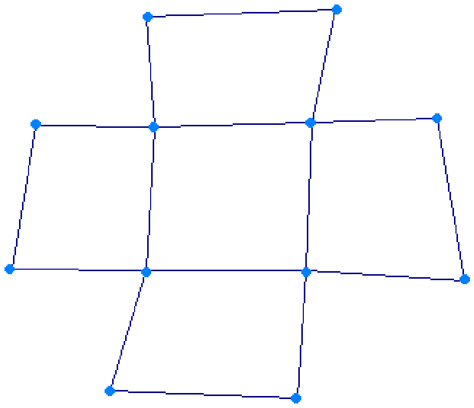
(1) Si $S_4 = 1$; $2S_5 = 0$ et $3S_6 = 0$, alors $S_3 = 8$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 9$.
Dès lors, la solution $S_3 = 8$ **et** $S_4 = 1$ est une solution potentielle.

Les neuf solutions potentielles sont :

(a)(1) $F_4 = 7$
$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$
Impossible
On a 7 quadrilatères à assembler.



Au sommet d'ordre 4, nous assemblons 4 quadrilatères. Pour refermer ce polyèdre euclidien convexe à 7 faces, il faudrait dans ce cas 1 octogone "à la base" (ce qui est impossible car, dans le cas qui nous occupe, la base ne serait pas plane). Or, nous ne disposons plus que de 3 quadrilatères qui ne peuvent en aucun cas être dans le même plan. Nous aurions donc besoin d'1 sommet supplémentaire alors que la totalité de ceux-ci ont été utilisés. Ceci montre que ce cas est impossible.



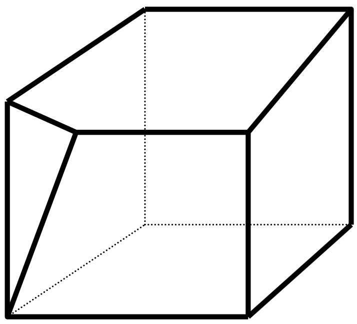
OU

Si nous assemblons 4 quadrilatères à 1 quadrilatère, il reste 2 quadrilatères pour refermer le polyèdre euclidien convexe à 7 faces alors qu'il n'est possible d'en mettre qu'1 seul pour le fermer. En effet, il manquerait au minimum 2 faces triangulaires pour fermer ce polyèdre. Or, nous n'avons aucune face triangulaire à notre disposition. Ceci montre que ce cas est impossible.

(d)(1) $F_3 = 1$ et $F_4 = 5$ et $F_5 = 1$

$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$

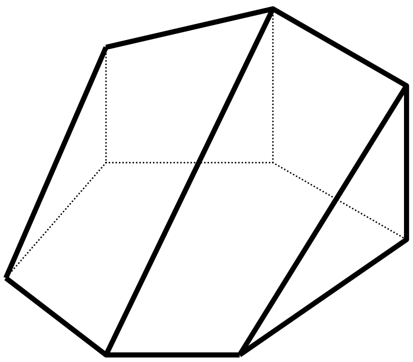
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



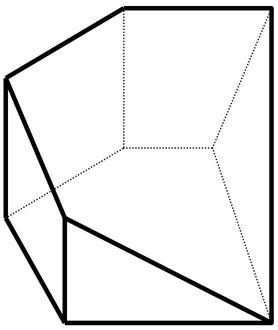
(h)(1) $F_3 = 2$ et $F_4 = 4$ et $F_6 = 1$

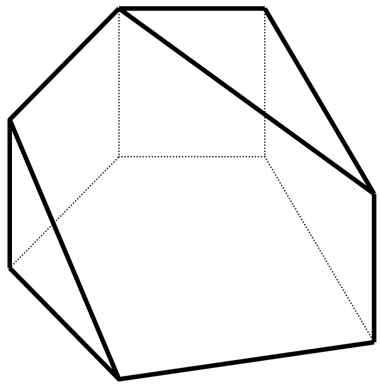
$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$

↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.

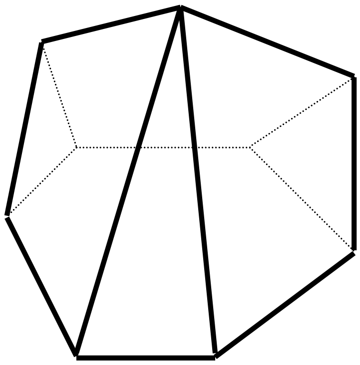


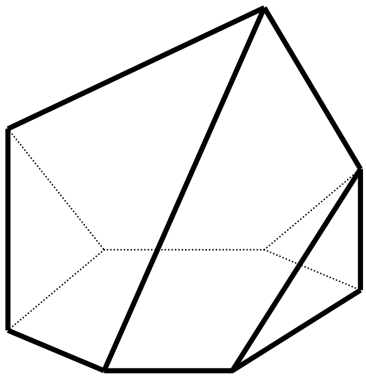
(k)(1) $F_3 = 2$ et $F_4 = 3$ et $F_5 = 2$
$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$
↳ Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.



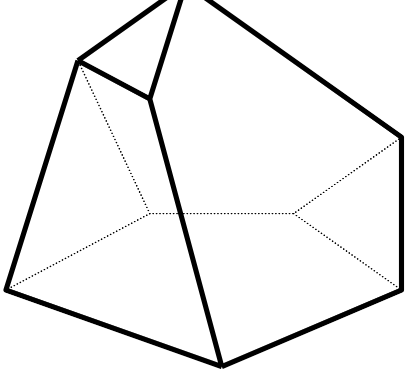


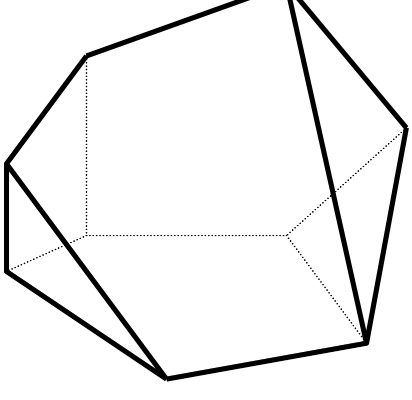
(u)(1) $F_3 = 3$ et $F_4 = 2$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 1$
$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$
↳ Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.





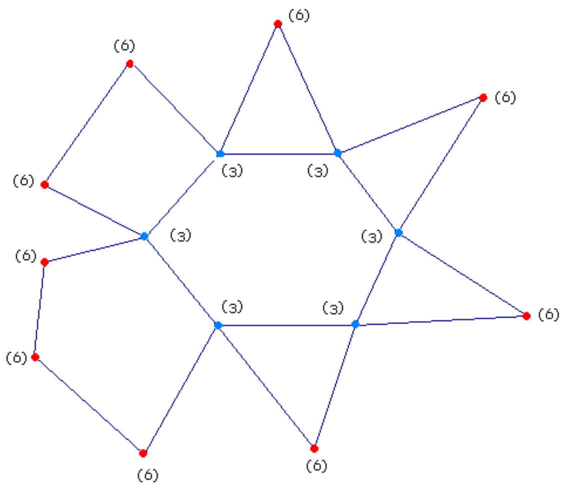
(v)(1) $F_3 = 3$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 3$
$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$
↳ Les polyèdres euclidiens convexes suivants remplissent les conditions ci-dessus.





(w)(1) $F_3 = 4$ et $F_4 = 1$ et $F_6 = 2$
$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$
Impossible

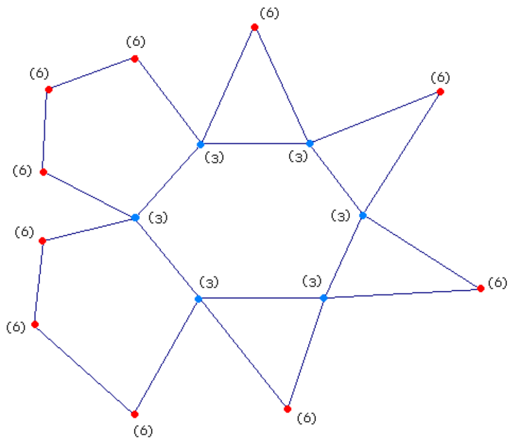
On a 4 triangles, 1 quadrilatère et 2 hexagones à assembler.



Si nous assemblons les 4 triangles, le quadrilatère et 1 hexagone à l'hexagone, il faudrait réunir ces 6 faces en 1 sommet (ce qui est impossible avec 4 triangles, 1 quadrilatère et 1 hexagone) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède aucun. Dès lors, ce cas est impossible.

(ι)(1) $F_3 = 4$ et $F_5 = 2$ et $F_6 = 1$
$S_3 = 8$ et $S_4 = 1$
Impossible

On a 4 triangles, 2 pentagones et 1 hexagone à assembler.



Si nous assemblons les 4 triangles et les 2 pentagones à l'hexagone, il faudrait réunir ces 6 faces en 1 sommet (ce qui est impossible avec 4 triangles et 2 pentagones) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède aucun. Dès lors, ce cas est impossible.

Cas où il y a 15 arêtes:

a) $A = 15$

b) $S = A - 5$
$S = 15 - 5$
$S = 10$

c) $M \leq 6 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 7 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6$
$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 30 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6$

$F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de permutations avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $$K_n^r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Dans le cas qui nous occupe, r = 9 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^9 = \frac{(9+3-1)!}{9!(3-1)!} = \frac{11!}{9!2!} = 55$

Ecrivons ces 55 possibilités: $F_4 \quad + \quad 2F_5 \quad + \quad 3F_6 \quad = \quad 9$

F_4	$2F_5$	$3F_6$	
~~9~~	~~0~~	~~0~~	(a)
~~8~~	~~1~~	~~0~~	(b)
~~8~~	~~0~~	~~1~~	(c)
~~7~~	~~2~~	~~0~~	(d)
~~7~~	~~0~~	~~2~~	(e)
~~7~~	~~1~~	~~1~~	(f)
~~6~~	~~3~~	~~0~~	(g)
6	0	3	(h)
~~6~~	~~2~~	~~1~~	(i)
~~6~~	~~1~~	~~2~~	(j)
5	4	0	(k)
~~5~~	~~0~~	~~4~~	(l)
~~5~~	~~3~~	~~1~~	(m)
~~5~~	~~1~~	~~3~~	(n)
~~5~~	~~2~~	~~2~~	(o)
~~4~~	~~5~~	~~0~~	(p)
~~4~~	~~0~~	~~5~~	(q)
~~4~~	~~4~~	~~1~~	(r)
~~4~~	~~1~~	~~4~~	(s)
~~4~~	~~3~~	~~2~~	(t)
4	2	3	(u)
3	6	0	(v)
3	0	6	(w)
~~3~~	~~5~~	~~1~~	(x)
~~3~~	~~1~~	~~5~~	(y)
~~3~~	~~4~~	~~2~~	(z)
~~3~~	~~2~~	~~4~~	(α)
~~3~~	~~3~~	~~3~~	(β)
~~3~~	~~7~~	~~0~~	(γ)
~~2~~	~~0~~	~~7~~	(δ)
~~2~~	~~6~~	~~1~~	(ε)

~~2~~	~~1~~	~~6~~	(ζ)
~~2~~	~~5~~	~~2~~	(η)
~~2~~	~~2~~	~~5~~	(θ)
2	4	3	(ι)
~~2~~	~~3~~	~~4~~	(κ)
1	8	0	(λ)
~~1~~	~~0~~	~~8~~	(μ)
~~1~~	~~7~~	~~1~~	(ν)
~~1~~	~~1~~	~~7~~	(ξ)
~~1~~	~~6~~	~~2~~	(ο)
1	2	6	(π)
~~1~~	~~5~~	~~3~~	(ρ)
~~1~~	~~3~~	~~5~~	(ς)
~~1~~	~~4~~	~~4~~	(σ)
~~0~~	~~9~~	~~0~~	(τ)
0	0	9	(υ)
~~0~~	~~8~~	~~1~~	(φ)
~~0~~	~~1~~	~~8~~	(χ)
~~0~~	~~7~~	~~2~~	(ψ)
~~0~~	~~2~~	~~7~~	(ω)
0	6	3	(д)
~~0~~	~~3~~	~~6~~	(ж)
~~0~~	~~5~~	~~4~~	(ℓ)
~~0~~	~~4~~	~~5~~	(◊)

Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y a 11 arêtes.

Quelles sont les solutions à considérer pour les faces?

(h) Si $F_4 = 6$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3F_6 = 3 \\ F_6 = 1 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

De là, on conclut que $F_3 = 0$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_4 = 6$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

(k) Si $F_4 = 5$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2F_5 = 4 \\ F_5 = 2 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

De là, on conclut que $F_3 = 0$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_4 = 5$ et $F_5 = 2$** est une solution potentielle.

(u) Si $F_4 = 4$; $\begin{array}{r} 2F_5 = 2 \\ F_5 = 1 \end{array}$ et $\begin{array}{r} 3F_6 = 3 \\ F_6 = 1 \end{array}$ alors $F_3 = 1$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.

Dès lors, la solution **$F_3 = 1$ et $F_4 = 4$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

(ν) Si $F_4 = 3$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2F_5 = 6 \\ F_5 = 3 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

De là, on conclut que $F_3 = 1$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 1$ et $F_4 = 3$ et $F_5 = 3$** est une solution potentielle.

(ω) Si $F_4 = 3$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3F_6 = 6 \\ F_6 = 2 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

De là, on conclut que $F_3 = 2$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 2$ et $F_4 = 3$ et $F_6 = 2$** est une solution potentielle.

(ι) Si $F_4 = 2$; $2F_5 = 4$ et $3F_6 = 3$
$F_5 = 2$ $F_6 = 1$ alors $F_3 = 2$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 2$ et $F_4 = 2$ et $F_5 = 2$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

(λ) Si $F_4 = 1$ et $3F_6 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 2F_5 = 8 \\ F_5 = 4 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

De là, on conclut que $F_3 = 2$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 2$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 4$** est une solution potentielle.

(π) Si $F_4 = 1$; $2F_5 = 2$ et $3F_6 = 6$
$F_5 = 1$ $F_6 = 2$ alors $F_3 = 3$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 3$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 2$** est une solution potentielle.

(υ) Si $F_4 = 0$ et $2F_5 = 0$, alors $\left.\begin{array}{r} 3F_6 = 9 \\ F_6 = 3 \end{array}\right\}$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

De là, on conclut que $F_3 = 4$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 4$ et $F_6 = 3$** est une solution potentielle.

(д) Si $F_4 = 0$; $2F_5 = 6$ et $3F_6 = 3$
$F_5 = 3$ $F_6 = 1$ car $F_4 + 2F_5 + 3F_6 = 9$

De là, on conclut que $F_3 = 3$ car $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 7$.
Dès lors, la solution **$F_3 = 3$ et $F_5 = 3$ et $F_6 = 1$** est une solution potentielle.

d) $$\left.\begin{array}{l} T \leq 6 \quad \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \quad \Rightarrow\ 10 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 \\ \qquad\quad \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \quad \Rightarrow\ 30 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 \end{array}\right\} \quad S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 0$$

Afin de résoudre cette équation, aidons-nous de la formule d'analyse combinatoire permettant de calculer le nombre de permutations avec répétitions présentée et expliquée au lien 1.

Rappel de cette formule: $K_n^r = \dfrac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$

Dans le cas qui nous occupe, r = 0 et n = 3.

Nombre de possibilités: $K_3^0 = \dfrac{(0+3-1)!}{0!(3-1)!} = \dfrac{2!}{0!2!} = 1$

Ecrivons cette possibilité: $S_4 + 2S_5 + 3S_6 = 0$

S_4	$2S_5$	$3S_6$	
0	0	0	(1)

Remarque: les solutions à rejeter ne sont pas détaillées ici mais se justifient de la même façon que dans le cas où il y a 11 arêtes.

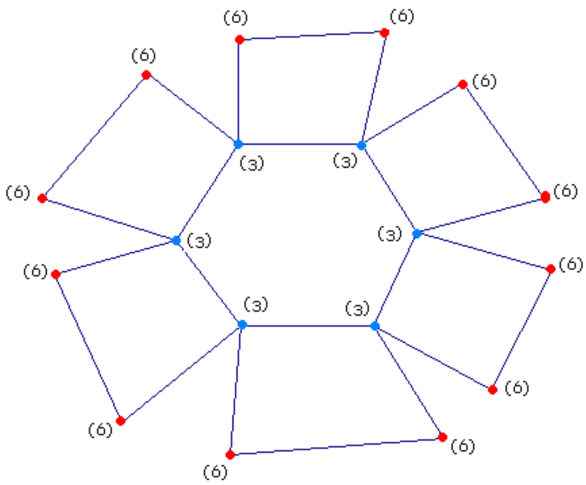
Quelles sont les solutions à considérer pour les sommets?

(1) Si $S_4 = 0$; $2S_5 = 0$ et $3S_6 = 0$, alors $S_3 = 10$ car $S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 10$.
Dès lors, la solution $\mathbf{S_3 = 10}$ est une solution potentielle.

Les dix solutions potentielles sont:

(h)(1) $F_4 = 6$ et $F_6 = 1$
$S_3 = 10$
Impossible

On a 6 quadrilatères et 1 hexagone à assembler.

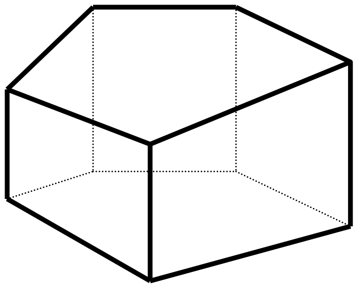


Si nous assemblons les 6 quadrilatères à l'hexagone, il faudrait réunir ces 6 faces en 1 sommet (ce qui est impossible avec 6 quadrilatères) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède aucun. Dès lors, ce cas est impossible.

(k)(1) $F_4 = 5$ et $F_5 = 2$

$S_3 = 10$

↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.

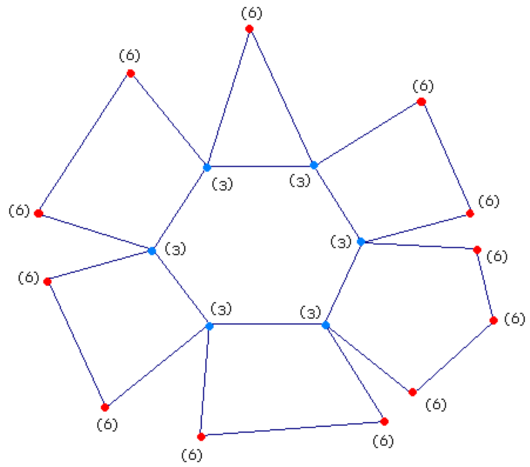


(u)(1) $F_3 = 1$ et $F_4 = 4$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 1$

$S_3 = 10$

↳ Impossible

On a 1 triangle, 4 quadrilatères, 1 pentagone et 1 hexagone à assembler.

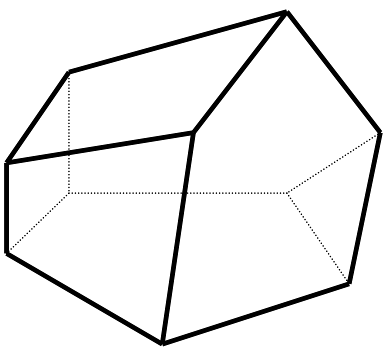


Si nous assemblons le triangle, les 4 quadrilatères et le pentagone à l'hexagone, il faudrait réunir ces 6 faces en 1 sommet (ce qui est impossible avec 6 quadrilatères) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède aucun. Dès lors, ce cas est impossible.

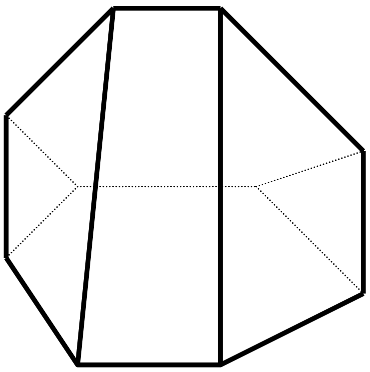
(v)(1) $F_3 = 1$ et $F_4 = 3$ et $F_5 = 3$

$S_3 = 10$

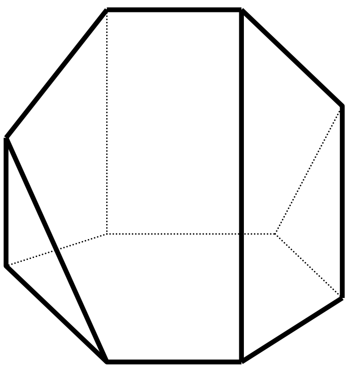
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



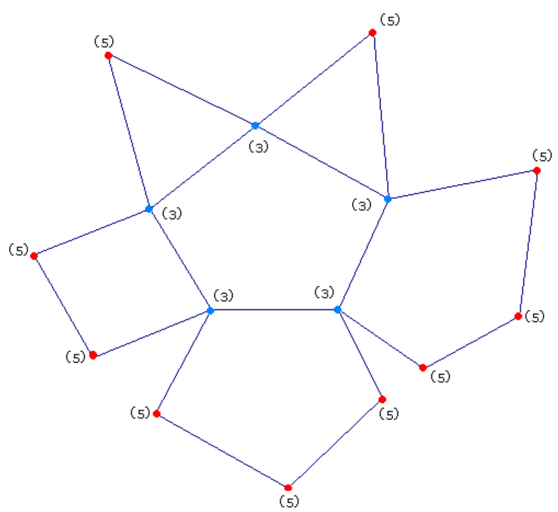
(w)(1) $F_3 = 2$ et $F_4 = 3$ et $F_6 = 2$
$S_3 = 10$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(ι)(1) $F_3 = 2$ et $F_4 = 2$ et $F_5 = 2$ et $F_6 = 1$
$S_3 = 10$
↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



(λ)(1) $F_3 = 2$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 4$
$S_3 = 10$
↳ Impossible
On a 2 triangles, 1 quadrilatère et 4 pentagones à assembler.



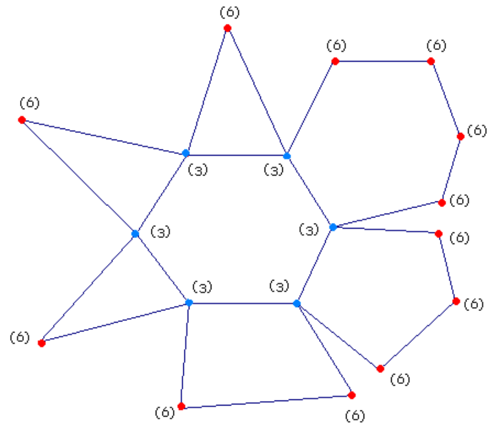
Les 2 triangles, le quadrilatère et 2 pentagones "s'accrochent" aux 5 côtés d'1 pentagone. Il nous reste donc 1 pentagone à assembler pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Or, il est impossible de refermer ce polyèdre avec 1 pentagone car cette face ne serait pas plane. Ce qui montre que ce cas est impossible.

(π)(1) $F_3 = 3$ et $F_4 = 1$ et $F_5 = 1$ et $F_6 = 2$

$S_3 = 10$

↳ Impossible

On a 3 triangles, 1 quadrilatère, 1 pentagone et 2 hexagones à assembler.



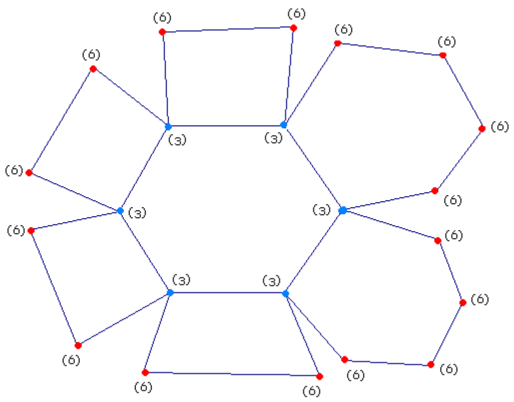
Si nous assemblons 3 triangles, le quadrilatère, le pentagone et 1 hexagone à 1 hexagone, il faudrait réunir ces 6 faces en 1 sommet (ce qui est impossible avec 6 quadrilatères) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède aucun. Dès lors, ce cas est impossible.

(υ)(1) $F_3 = 4$ et $F_6 = 3$

$S_3 = 10$

↳ Impossible

On a 4 triangles et 3 hexagones à assembler.

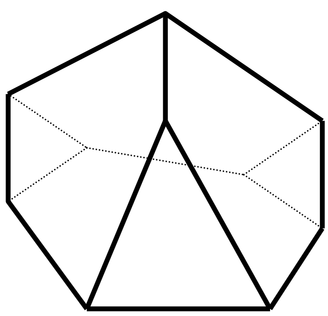


Si nous assemblons les 4 quadrilatères et 2 hexagones à 1 hexagone, il faudrait réunir ces 6 faces en 1 sommet (ce qui est impossible avec 6 quadrilatères) pour obtenir un polyèdre euclidien convexe à 7 faces. Ceci ferait donc apparaître 1 sommet d'ordre 6 alors que ce polyèdre n'en possède aucun. Dès lors, ce cas est impossible.

(д)(1) $F_3 = 3$ et $F_5 = 3$ et $F_6 = 1$

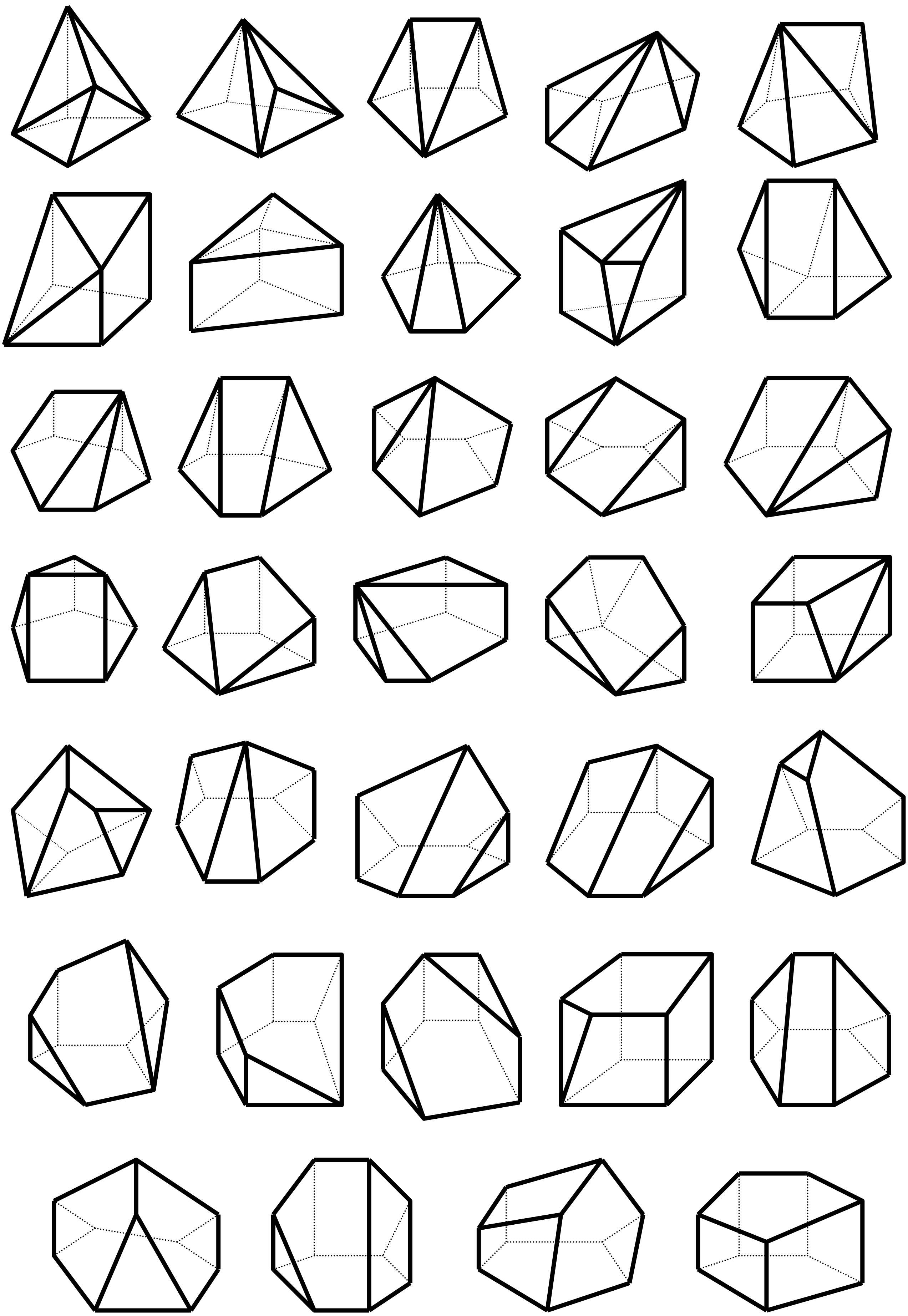
$S_3 = 10$

↳ Le polyèdre euclidien convexe suivant remplit les conditions ci-dessus.



En conclusion, il y a 34 polyèdres euclidiens convexes à 7 faces.

Les 34 polyèdres euclidiens convexes à 7 faces



2.6. Les polyèdres euclidiens convexes à 8 faces

Comme le polyèdre euclidien convexe possède 8 faces, il vient que:

1) F = 8

2) S = A – 6 car:

$$\begin{aligned} F + S - A &= 2 \\ 8 + S - A &= 2 \\ S &= A - 6 \end{aligned}$$

3) $12 \leq A \leq 18$ car:

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A$$
$$A + 6 \leq 24 \leq 2A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 6 \leq 24 \\ 24 \leq 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 24 - 6 \\ 12 \leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq 18 \\ 12 \leq A \end{cases}$$

D'où: $12 \leq A \leq 18$

4) M et $T \leq 7$ car:

1° Si M = 8, c'est-à-dire si la face au plus grand nombre de côtés est un 8-gone, le polyèdre euclidien aura au minimum 9 faces. Or, F = 8.

2° Si T = 8, c'est-à-dire si le sommet d'ordre 8 est le sommet dont l'ordre est le plus grand, le polyèdre euclidien possédera au minimum 9 faces. Or, F = 8.

Détermination des différents types de polyèdres euclidiens convexes à 8 faces:

Lorsque le nombre de faces (F) vaut 8, le nombre d'arêtes est compris entre 12 et 18. La détermination de tous les types de polyèdres euclidiens convexes à 8 faces se fera en analysant les cas où le nombre d'arêtes vaut respectivement 12, 13, 14, 15, 16, 17 et 18.

- Cas où il y a 12 arêtes:

a) A = 12

b) S = A – 6
S = 12 – 6
S = 6

c)
$$\left.\begin{aligned} M \leq 7 \Rightarrow F &= \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 8 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 \\ \Rightarrow 2A &= \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 24 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 = 0$$

d)
$$\left.\begin{aligned} T \leq 7 \Rightarrow S &= \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 6 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 \\ \Rightarrow 2A &= \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 24 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + 7S_7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 4S_7 = 6$$

Cas où il y a 13 arêtes:

a) $A = 13$

b) $S = A - 6$
$S = 13 - 6$
$S = 7$

c)
$$\left.\begin{array}{l} M \leq 7 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 8 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 26 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 \end{array}\right\} \Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 = 2$$

d)
$$\left.\begin{array}{l} T \leq 7 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 7 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 26 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + 7S_7 \end{array}\right\} \Rightarrow S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 4S_7 = 5$$

Cas où il y a 14 arêtes:

a) $A = 14$

b) $S = A - 6$
$S = 14 - 6$
$S = 8$

c)
$$\left.\begin{array}{l} M \leq 7 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 8 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 28 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 \end{array}\right\} \Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 = 4$$

d)
$$\left.\begin{array}{l} T \leq 7 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 8 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 28 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + 7S_7 \end{array}\right\} \Rightarrow S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 4S_7 = 4$$

Cas où il y a 15 arêtes:

a) $A = 15$

b) $S = A - 6$
$S = 15 - 6$
$S = 9$

c)
$$\left.\begin{array}{l} M \leq 7 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 8 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 \\ \Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 30 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 \end{array}\right\} \Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 = 6$$

d) $T \leq 7 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 9 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 30 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + 7S_7$

$\Rightarrow S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 4S_7 = 3$

Cas où il y a 16 arêtes:

a) A = 16

b) S = A – 6
S = 16 – 6
S = 10

c) $M \leq 7 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 8 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 32 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7$

$\Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 = 8$

d) $T \leq 7 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 10 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 32 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + 7S_7$

$\Rightarrow S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 4S_7 = 2$

Cas où il y a 17 arêtes:

a) A = 17

b) S = A – 6
S = 17 – 6
S = 11

c) $M \leq 7 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 8 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 34 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7$

$\Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 = 10$

d) $T \leq 7 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 11 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 34 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + 7S_7$

$\Rightarrow S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 4S_7 = 1$

Cas où il y a 18 arêtes:

a) A = 18

b) S = A – 6
S = 18 – 6
S = 12

c) $M \leq 7 \Rightarrow F = \sum_{i=3}^{M} F_i \Rightarrow 8 = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{M} iF_i \Rightarrow 36 = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7$

$\Rightarrow F_4 + 2F_5 + 3F_6 + 4F_7 = 12$

d) $T \leq 7 \Rightarrow S = \sum_{i=3}^{T} S_i \Rightarrow 12 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$

$\Rightarrow 2A = \sum_{i=3}^{T} iS_i \Rightarrow 36 = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + 7S_7$

$\Rightarrow S_4 + 2S_5 + 3S_6 + 4S_7 = 0$

Au lien 3, situé dans l'introduction et ajouté à nouveau ci-dessous, se trouve le travail de Monsieur Michel Lafond dans lequel il détermine les 34 polyèdres euclidiens convexes à 7 faces d'une manière différente de la nôtre.

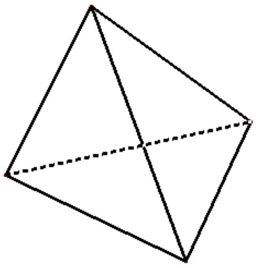
De plus, il semblerait, d'après une suite donnant le nombre de polyèdres euclidiens convexes en fonction du nombre de faces (découverte dans "THE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES" de N.J.A. SLOANE et Simon PLOUFFE chez "ACADEMIC PRESS"), qu'il existe 257 polyèdres euclidiens convexes à 8 faces.

Nous venons de vous présenter les équations permettant de les trouver, laissez libre cours à votre imagination!

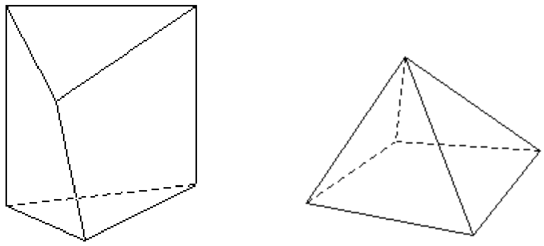
(Cf. pg. III - 61)

2.8. Synthèse des différents polyèdres euclidiens convexes à 4 - 5 - 6 et 7 faces

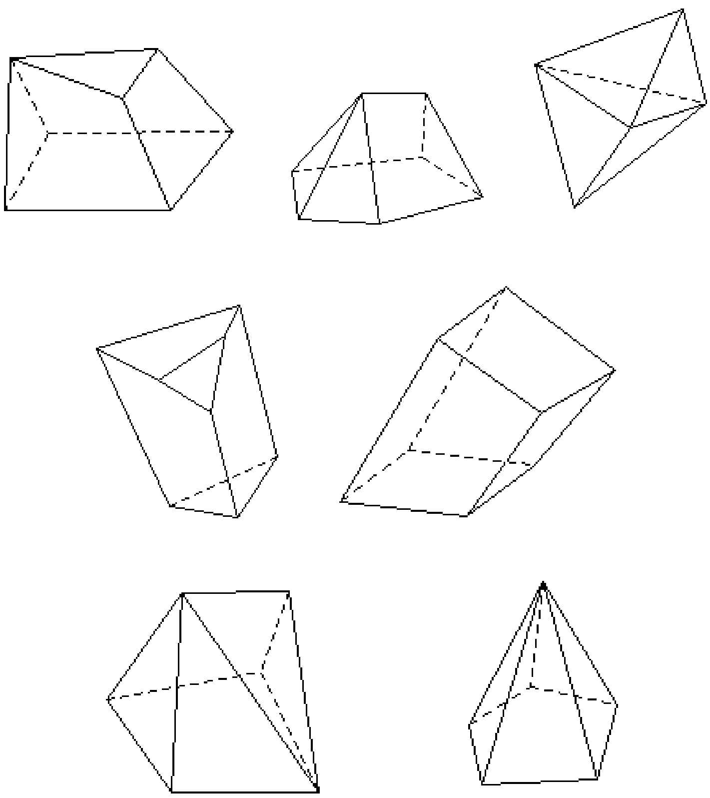
Le polyèdre euclidien convexe à 4 faces



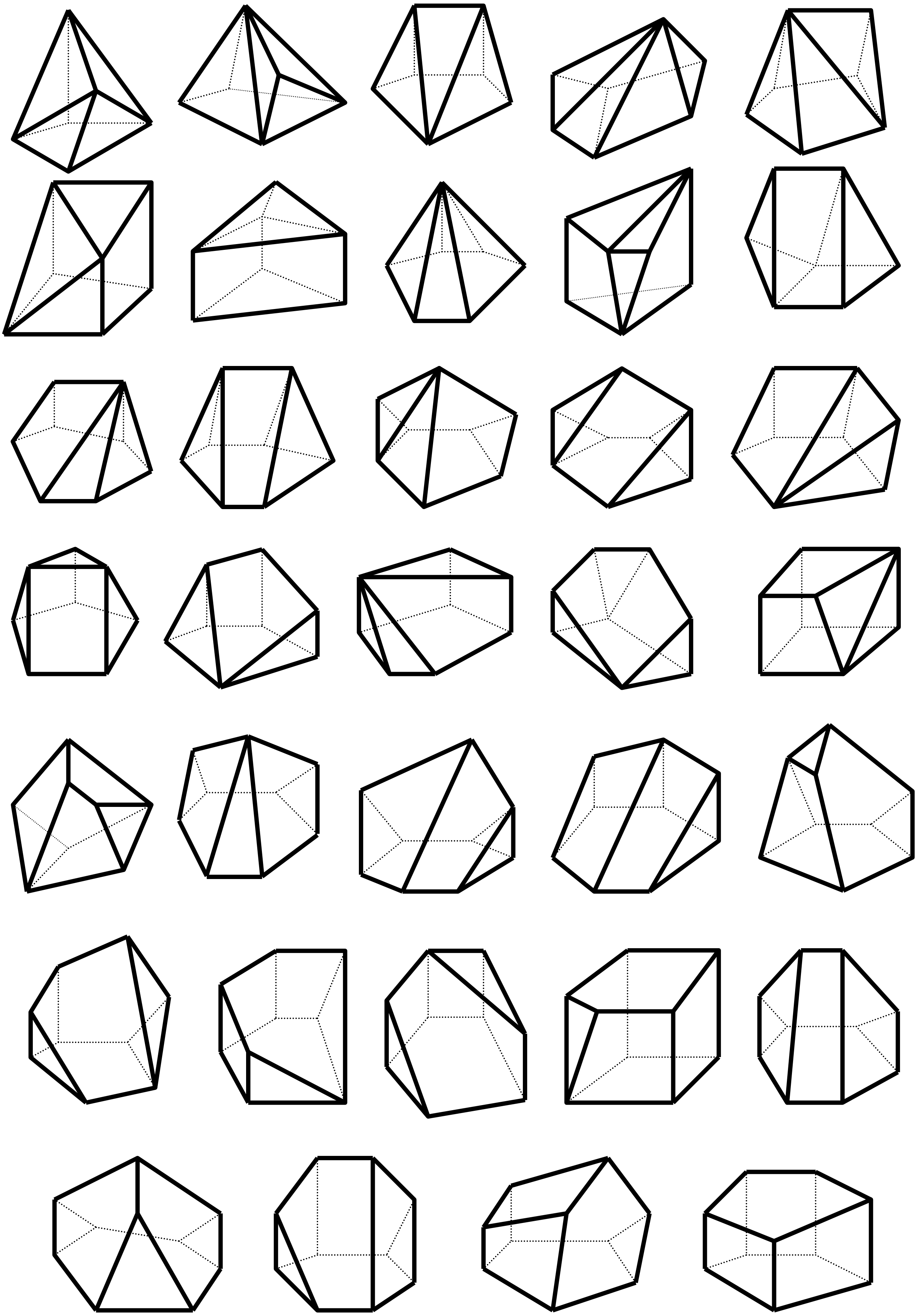
Les 2 types de polyèdres euclidiens convexes à 5 faces



Les 7 types de polyèdres euclidiens convexes à 6 faces



Les 34 polyèdres euclidiens convexes à 7 faces



II - Formule d'analyse combinatoire

Voici un exemple précis d'utilisation de la formule $K_n^r = \dfrac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$

où K représente le nombre total de combinaisons avec répétitions;
r représente le nombre d'éléments à considérer;
n représente le nombre de groupes dans lesquels on distribue les r éléments.

Enoncé:

A la fin de la journée, l'éducatrice de la maternelle demande au petit Jean-Philippe de ranger les 14 jouets dans les six boîtes au fond de la classe. Jean-Philippe se dit qu'il va procéder d'une manière différente d'une journée à l'autre de façon qu'il n'y ait pas le même nombre de jouets dans les boîtes d'une fois à l'autre.

De combien de manières différentes peut-il procéder?

Mise en équation du problème:

$$J_A + J_B + J_C + J_D + J_E + J_F = 14$$

où J_A représente le nombre de jouets rangés dans la boîte A.
J_B représente le nombre de jouets rangés dans la boîte B.
J_C représente le nombre de jouets rangés dans la boîte C.
J_D représente le nombre de jouets rangés dans la boîte D.
J_E représente le nombre de jouets rangés dans la boîte E.
J_F représente le nombre de jouets rangés dans la boîte F.

Solution:

Dans le contexte, on ne distingue pas les jouets, on s'intéresse seulement au nombre de jouets par boîte. Pour ranger les jouets, Jean-Philippe assigne à chaque jouet une boîte choisie parmi les six boîtes, nommées par exemple A, B, C, D, E et F. Un choix se fait pour chaque jouet et, bien sûr, les répétitions sont possibles. Il y a alors une disposition non ordonnée avec répétitions de 14 boîtes choisies parmi 6.

Rappel de la formule utilisée : $K_n^r = \dfrac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$.

Dans le cas qui nous occupe, r = 14 et n = 6.

Dès lors, il vient que: $K_6^{14} = \dfrac{(14+6-1)!}{14!(6-1)!} = \dfrac{19!}{14!5!} = 11628$.

Interprétation du résultat trouvé:

K = 11628 représente le nombre total de combinaisons avec répétitions possibles si nous voulons ranger 14 jouets dans 6 boîtes.

III - Dénombrement des polyèdres convexes

Depuis de nombreuses années je me posais la question suivante:
"**Combien y a t-il de polyèdres convexes distincts à n faces?**".
Je savais qu'il y a un seul tétraèdre et deux pentaèdres (dessinés dans 4)
Pour la suite j'étais dans l'ignorance jusqu'à ce que je tombe sur un livre magique:
"THE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES" de N.J.A. SLOANE et Simon PLOUFFE chez ACADEMIC PRESS.

Ce livre référencie plus de 5000 suites numériques à valeurs entières positives, lesquelles sont classées dans l'ordre lexicographique des premiers termes avec quelques commentaires et références, et éventuellement une formule ou une relation de récurrence.

Par exemple la suite à la référence M2981 est:
1,1,3,14,147,3462,294392 … [1,3]
egyptian fractions : partitions of 1 into parts 1/n, donc
il y a 147 solutions à l'équation diophantienne $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$

En parcourant ce livre j'ai remarqué à la référence M1796 la suite
1,2,7,34,257,2606,32300,440564,6384634
polyedra with n nodes … [4,2] qui donne donc à partir de n = 4 le nombre de polyèdres (convexes) ayant n sommets. Comme il y a autant de polyèdres à n sommets que de polyèdres à n faces (nous verrons pourquoi), j'avais la réponse à ma question en tous cas jusqu'à n = 12.

J'ai ainsi appris qu'il y avait 7 hexaèdres et 34 heptaèdres. Ce dernier résultat me sembla exagéré aussi je me suis amusé à les recenser et j'en ai bien trouvé 34 (ils sont dessinés à la fin). 257 octaèdres ce n'est déjà pas rien, mais plus de 6 millions de dodécaèdres c'est dur à digérer!

Ceux qui sont intéressés par ce livre mais qui ne veulent pas l'acheter peuvent comme il est dit dans la préface procéder ainsi pour avoir des renseignements sur une suite connaissant seulement les premiers termes :

Il faut disposer d'une adresse électronique (e-mail).
Si vous êtes connecté à internet, il n'y a pas de problème, mais **ce n'est pas nécessaire**!.
Si vous êtes enseignant, votre lycée vous en donne une (CARAMAIL , LEMEL….)
Sinon il y a un moyen très simple que j'utilise encore : faire à partir d'un **simple minitel** le 3615 minitelnet et suivre les indications pour avoir un e-mail **gratuit**.
Bref, vous êtes dans votre messagerie préférée et à partir de là c'est enfantin :
Vous envoyez le courrier à l'adresse superseeker@research.att.com
et à objet vous tapez lookup 3 4 5 7 9 12 16 22 30 42 58 81 113
(ou les premiers termes de votre suite séparés par des blancs)
Il n'y a plus qu'à envoyer le message (qui est vide) et à attendre. Des algorithmes très élaborés (décrits au début du livre) sont alors mis en œuvre et si votre suite n'est pas trop tordue vous obtiendrez une réponse par retour de courrier (électronique).
(*attention les adresses électroniques peuvent changer*)

1) Avant d'entreprendre le dénombrement de tel ou tel type de polyèdre, une question se pose tout de suite : si on utilise les notations usuelles pour un polyèdre

S pour le nombre de sommets
F pour le nombre de faces
A pour le nombre d'arêtes

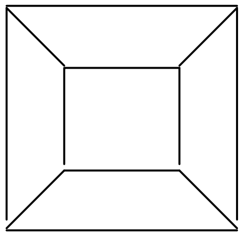
Q1

Existe-t-il un polyèdre convexe ayant S sommets, F faces et A arêtes? (S,F,A) étant un triplet d'entiers donné.

La réponse à Q1 est non car S,F,A sont liés par la condition nécessaire suivante dite relation d'EULER $\mathbf{S + F = A + 2}$ **(1)**

La démonstration de (1) est assez simple:

Si (P) est un polyèdre convexe donné, supprimons une face de (P) et quitte à déformer un peu les faces, aplatissons-le de manière à se ramener à un polygone convexe (P'), pavé de F-1 polygones, chacun correspondant à une face de (P).



Bien sûr on préserve la topologie, on ne fait que déformer.

(*La figure ci-contre montre l'aplatissement du cube*.)

Pour démontrer (1), il suffit de démontrer S+F = A+1 dans (P')

Pour cela posons k = S + F – A

De deux choses l'une:

Ou bien (P') n'a pas de sommet intérieur et alors (P') possède n sommets, 1 face, n arêtes donc k = n + 1 – n = 1.

Ou bien (P') possède (au moins) 1 sommet intérieur. Supprimons ce sommet ainsi que les p arêtes qui en partent. La suppression fait perdre 1 sommet, p arêtes et p-1 faces donc k est inchangé. En supprimant de proche en proche tous les sommets intérieurs, on se ramènera (sans changer k) au cas précédent pour lequel on a vu que k valait 1. CQFD

Puisqu'on a nécessairement A = S + F – 2 pour tout polyèdre, il suffit dans la question Q1 de se donner S et F. On dira dans la suite que:

Un polyèdre est de type (S, F) s'il a S sommets et F faces.

La question Q1 devient:

Q2 **Etant donnés 2 entiers S, F existe-t-il un polyèdre de type (S, F)?**

Un théorème de **STEINIZ** répond à Q:

Il existe un polyèdre convexe de type (S, F) si et seulement si

$$\mathbf{S \geq 4} \quad \textbf{et} \quad \frac{1}{2}\mathbf{S + 2 \leq F \leq 2S - 4} \qquad \textbf{(2)}$$

La démonstration de (2) faisait l'objet d'une question posée par Marc ROYER dans le bulletin N° 415 à propos de l'avis de recherche N° 86 sur les polyèdres convexes à 7 arêtes.

La voici:

<u>Les conditions de (2) sont nécessaires</u>:

$\mathbf{S \geq 4}$ sinon le polyèdre serait plan.

$2A \geq 3F$ car chaque face a au moins 3 arêtes, chacune comptée 2 fois.

$2A \geq 3S$ car de chaque face partent au moins 3 arêtes, chacune comptée 2 fois.

Donc $F = A - S + 2 \geq \frac{3}{2}S - S + 2 = \frac{1}{2}S + 2 \Rightarrow \mathbf{F \geq \frac{1}{2}S + 2}$.

$S = A - F + 2 \geq \frac{3}{2}F - F + 2 = \frac{1}{2}F + 2 \Rightarrow \mathbf{F \leq 2S - 4}$.

<u>Les conditions de (2) sont suffisantes</u>: c'est un peu plus difficile, car si

S ≥ 4 **et** $\frac{1}{2}$ **S + 2 ≤ F ≤ 2 S – 4** il faut exhiber un polyèdre de type (S, F)

* Si **S = 4** alors 4 ≤ F ≤ 4 Le tétraèdre convient.

* Si **S = 5** alors 5 ≤ F ≤ 6

pour F = 5 la pyramide à base carrée convient.

pour F = 6 deux tétraèdres accolés (bipyramide) font l'affaire.

* Si **S ≥ 6** on distingue deux cas : $\frac{1}{2}$ S + 2 ≤ F ≤ S ou S + 1 ≤ F ≤ 2 S - 4

PREMIER CAS: $\frac{1}{2}$ **S + 2 ≤ F ≤ S** **(α)**

\- **ou bien S = 2n** et **(α)** équivaut à n + 2 ≤ F ≤ 2n

Considérons le prisme (P) dont les bases sont deux polygones à n côtés (Fig 1 est possible puisque S ≥ 6 ⇒ n ≥ 3).
(P) a **2n sommets** et n+2 faces, or si on rapproche légèrement B de C le long de (BC), (BCB'C') n'est que déformé, mais le quadrilatère (ABA'B') devient gauche avec 2 faces triangulaires (AA'B') et (AB'B). Le résultat est qu'on a **autant de sommets** mais **une face de plus**. On peut faire ceci pour toutes les faces de (P) autres que les bases. Si on le fait k fois [0 ≤ k ≤ n-2] , on aboutit à un polyèdre ayant n+2+k faces, nombre compris **entre n+2 et 2n**.
<u>De plus ce polyèdre possède 2 faces quadrangulaires voisines</u>.

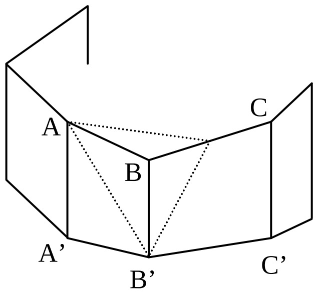


Fig 1

\- **ou bien S = 2n**+1 et **(α)** équivaut à n + 3 ≤ F ≤ 2n +1

On sait d'après le cas précédent obtenir un polyèdre (P) ayant 2n sommets et F-1 faces, dont 2 faces voisines sont des quadrilatères (Fig 2). Si on "tronque" le sommet X de (P), on augmente le nombre de faces et le nombre de sommets de 1,
ce qui nous amène pour les faces de n+2 ≤ F-1 ≤ 2n à **n+3 ≤ F ≤ 2n+1**
et pour les sommets de 2n à **2n+1**.

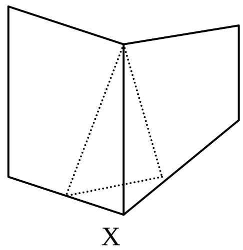


Fig 2

DEUXIEME CAS : **S + 1 ≤ F ≤ 2S - 4**

Partons de la pyramide (P) de base un polygone à 2S-F-1 sommets.
[C'est possible puisque 2S-F-1 ≥ 3].
(P) a 2S-F sommets et 2S-F faces dont au moins 3 sont des triangles.
Considérons l'opération Ω consistant à accoler à une face triangulaire de (P) un tétraèdre (suffisamment aplati). Dans Ω le nombre de sommets augmente de 1, et celui des triangles de 2.
Itérons F-S fois Ω. [c'est possible puisque F-S ≥ 1]. On arrive à un polyèdre (P') ayant
(2S-F) + F-S = **S sommets** et (2S-F) + 2(F-S) = **F faces**. C Q F D

2) On peut maintenant entrer dans le vif du sujet et poser la question

Q3 **Combien y a-t-il de polyèdres convexes distincts de type (S, F)**?

Précisons ce qu'on entend par **polyèdres distincts**.

Disons qu'on ne s'intéresse qu'à la topologie (forme) des polyèdres : disposition des faces les unes par rapport aux autres… mais pas aux longueurs des arêtes, surfaces des faces…
On considère donc comme équivalents deux polyèdres qui diffèrent par

des rotations, translations, homothéties, symétries de R^3.
des déformations comme l'étirement d'une arête…

Dans cette optique **il n'existe par exemple qu'un seul tétraèdre**.

A partir de maintenant notons

$\prod$ (S, F) le nombre de polyèdres convexes distincts de type (S, F)

Indiquons dans un tableau quelques valeurs de $\prod$ **(S,F)**.

Polyèdres convexes		Nombre de faces								
		4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de sommets	4	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
	6	0	**1**	**2**	**2**	**2**	0	0	0	0
	7	0	0	**2**	**8**	**11**	**8**	**5**	0	0
	8	0	0	**2**	**11**	**42**	**74**	**?**	**?**	**?**
	9	0	0	0	**8**	**74**	**296**	**?**	**?**	**?**

On verra bientôt comment sont obtenues certaines de ces valeurs.

3) Que remarque-t-on dans ce tableau ?

Bien entendu, les 0 correspondent aux couples (S,F) qui ne vérifient pas la condition (2) de STEINIZ. Ainsi si S = 4 alors (2) implique $4 \leq F \leq 4$ donc F = 4.
si S = 5 alors (2) implique $5 \leq F \leq 6$ etc .

Mais **d'où vient la symétrie du tableau** ?

Elle vient d'une notion fondamentale : la **DUALITE**.

Le dual d'un polyèdre convexe (P) de type (S,F) est un polyèdre convexe que je note **(P~)** de type (F,S). (P) a donc autant de sommets que (P~) a de faces et réciproquement, et d'après la relation d'EULER ils ont tous deux le même nombre d'arêtes : A = S + F –2.

De plus il existe une bijection involutive δ qui

à chaque sommet X de (P) associe une face δ (X) de (P~)

à chaque face π de (P) associe un sommet δ (π) de (P~) et qui vérifie la propriété suivante :

Si $\pi = (X_1, X_2, X_3 \ldots. X_q)$ est une face quelconque de (P) alors le sommet δ (π) de (P~) est commun aux faces $\delta (X_1)$, $\delta (X_2) \ldots \delta (X_q)$ de (P~) et seulement à ces faces-là.

Cette définition ainsi que l'existence du dual ne sont pas évidentes, je me contenterai de donner 2 méthodes de constructions effectives sur l'exemple de l'hexaèdre (P) ci-dessous.

Les arêtes en trait gras doivent être vues en avant.

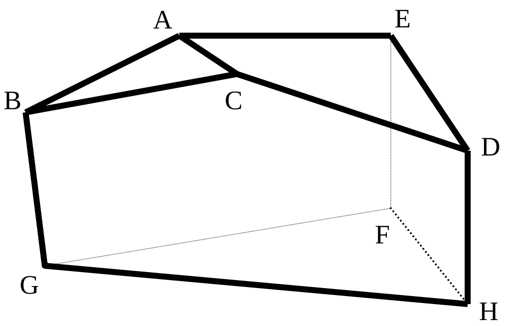


Fig 3

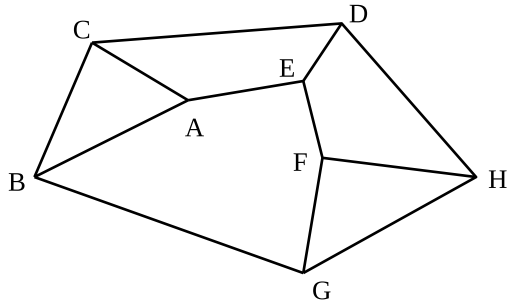


Fig 4

Construction du dual utilisant le graphe dual:

On supprime une face par exemple (BCDHG) et on aplatit comme vu dans la démonstration de la formule d'EULER au début. On obtient le polygone (P') de Fig 4.

Remarquez que les faces sont bien les mêmes sauf (BCDHG) qu'on a perdue mais qu'on peut considérer comme l'extérieur de Fig 4.

Ensuite on choisit un point à l'intérieur de chaque polygone du pavage, y compris un point à l'extérieur pour (BCDHG). Ces points vont constituer les sommets du dual (P~).

Il ne reste plus qu'à joindre 2 de ces points si et seulement si ce sont les points intérieurs à 2 faces adjacentes de (P). Ce qui est réalisé par des pointillés sur Fig 5.

Le dessin en pointillé est une vue de (P~) qu'on redessine proprement (Fig 6).

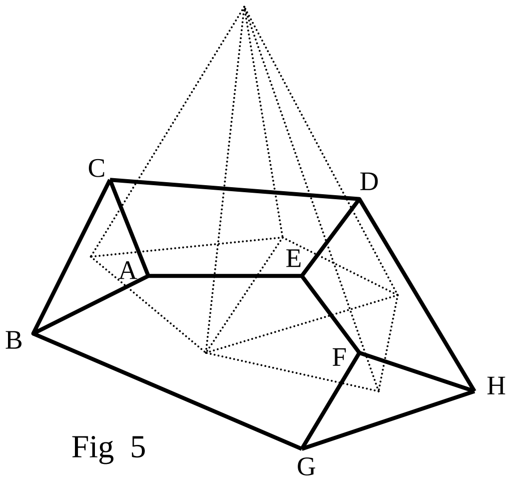


Fig 5

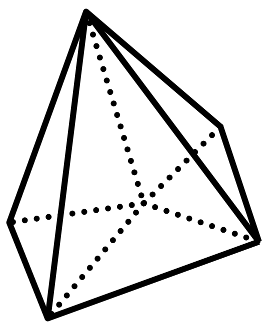


Fig 6

Construction du dual utilisant une représentation matricielle:

On commence par coder le polyèdre convexe (P) de type (S, F) par une matrice booléenne P de type (S, F) c'est-à-dire avec S lignes et F colonnes, avec la convention : $p_{i,j} = 1$ si et seulement si le sommet i appartient à la face j.

Pour notre exemple:

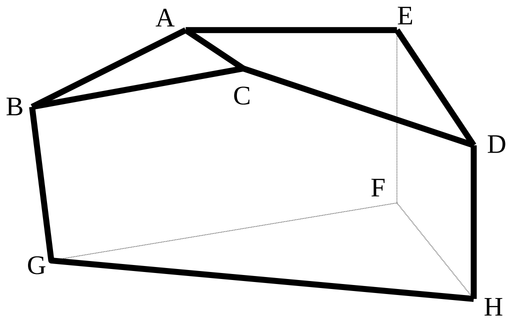
P =

	a	b	c	d	e	f
A	1	1	1	0	0	0
B	1	1	0	1	0	0
C	1	0	1	1	0	0
D	0	0	1	1	1	0
E	0	1	1	0	1	0
F	0	1	0	0	1	1
G	0	1	0	1	0	1
H	0	0	0	1	1	1

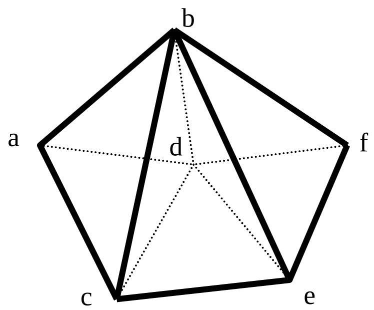
Dans ces conditions le dual (P~) a tout simplement pour matrice la transposée de P: P~
Pour effectuer la transposition, il suffit de permuter les lignes et les colonnes de la matrice P ainsi:

(P) a pour sommets {A,B,C,D,E,F,G,H} et pour faces
a = {ABC}   b = {ABEFG}   c = {ACDE}   d = {BCDGH}   e = {DEFH}   f = {FGH}.
donc: en tranposant, son dual (P~) a pour sommets {a,b,c,d,e,f} et pour faces
A = {abc}   B = {abd}   C = {acd}   D = {cde}   E = {bce}   F = {bef}   G = {bdf}   H = {def}

Ce qui donne directement :



polyèdre (P)



son dual (P~)

Ce dual peut être vu comme la réunion des 3 tétraèdres (abcd), (bcde) et (bdef).

Il faut bien se persuader que l**a matrice P détermine parfaitement le polyèdre (P)**.
Bien sûr pour dessiner (P) à partir de P, il y a un petit problème : pour chaque face on connaît les sommets mais pas l'ordre dans lequel ils se présentent. Mais il suffit de remarquer que (P) possède l'arête (X_i , X_j) si et seulement si dans les lignes i et j de P il existe 2 colonnes k,l telles que

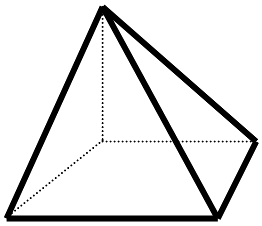
$p_{i,k} = p_{i,l} = p_{j,k} = p_{j,l} = 1$. Alors l'arête ($X_i$,X_j) est l'intersection des faces k et l.

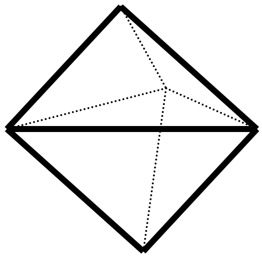
Par contre comme on peut numéroter arbitrairement les sommets et les faces, un polyèdre (P) possède plusieurs matrices représentatives se déduisant les une des autres par permutations des lignes ou permutations des colonnes.

La dualité est importante car tout résultat concernant les polyèdres convexes a automatiquement un résultat dual. On échange S et F tout simplement. Voici quelques exemples :

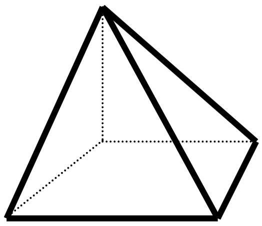
Exemple 1**. Le nombre de polyèdres à n faces est égal au nombre de polyèdres à n sommets.**

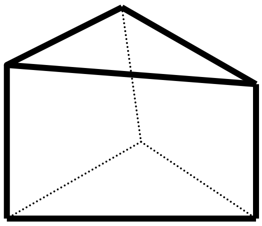
Ainsi: Il y a 2 polyèdres convexes à 5 sommets : (la 4-pyramide et la 3-bipyramide)





DONC Il y a 2 polyèdres convexes à 5 faces : (la 4-pyramide auto-duale et le 3-prisme).





Exemple 2.   La condition de STEINIZ a 2 formes duales équivalentes :

$$\mathbf{S \geq 4} \qquad \textbf{et} \qquad \frac{1}{2}\,\mathbf{S + 2 \ \leq\ F\ \leq\ 2\,S - 4} \qquad \textbf{ou}$$

$$\mathbf{F \geq 4} \qquad \textbf{et} \qquad \frac{1}{2}\,\mathbf{F + 2 \ \leq\ S\ \leq\ 2\,F - 4}$$

Exemple 3.
Si on note s_p le nombre de sommets d'ordre p (appartenant à p faces)
f_p le nombre de faces d'ordre p (ayant p sommets)

on a les deux relations duales :

$$s_4 + 2\,s_5 + 3\,s_6 + 4\,s_7 + \ldots = 2\,F - S - 4.$$

$$f_4 + 2\,f_5 + 3\,f_6 + 4\,f_7 + \ldots = 2\,S - F - 4.$$

et aussi

$$3\,s_3 + 2\,s_4 + s_5 \ \geq\ 12$$

$$3\,f_3 + 2\,f_4 + f_5 \ \geq\ 12$$

qui sont autant d’exercices amusants.

4) Passons aux dénombrements proprement dits.

En utilisant tout ce qui précède, montrons par exemple qu'il y a 7 polyèdres convexes à 6 faces:

- D'abord il est évident que **si $\mathbf{i \geq 6}$ alors $\mathbf{f_i = 0}$**.
- F = 6 , la condition de STEINIZ implique $\mathbf{5 \leq S \leq 8}$ et
  la relation $f_4 + 2\,f_5 + 3\,f_6 + 4\,f_7 + \ldots = 2\,S - F - 4$ devient $\mathbf{f_4 + 2\,f_5 = 2S - 10}$
  d'où l'algorithme :

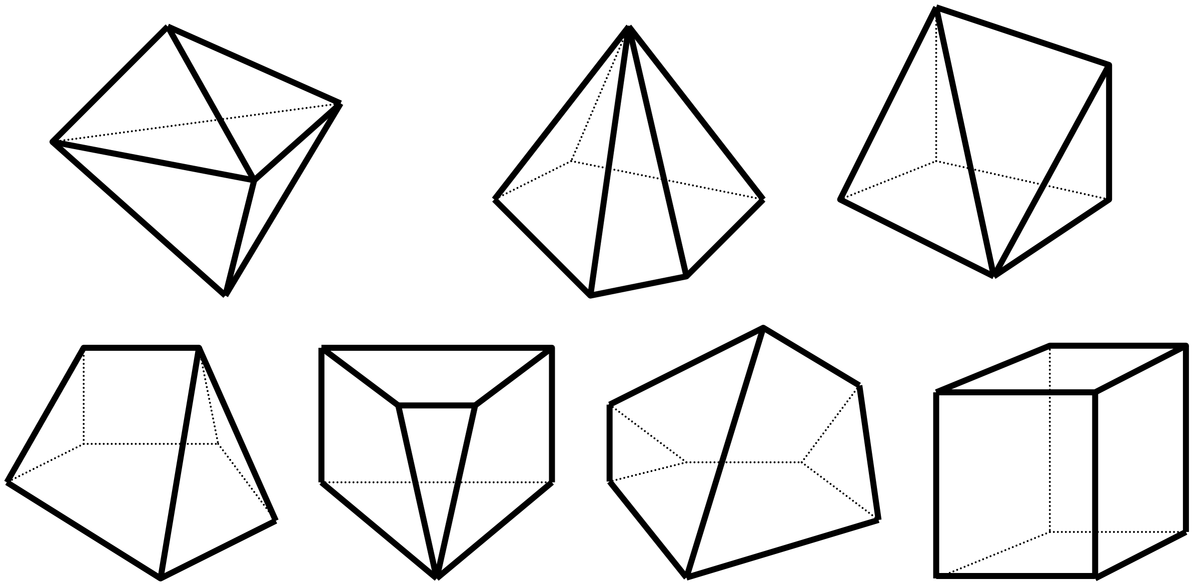
pour S variant de 5 à 8 on résout l'équation diophantienne $f_4 + 2\,f_5 = 2S - 10$ et
pour chaque solution $(f_4,\ f_5)$ on tire $f_3 = F - f_4 - f_5 = 6 - f_4 - f_5$

on connaît donc le nombre de faces de chaque ordre et on essaie de les placer de toutes les façons possibles à partir de l'une d'elles choisie comme base.
(on peut s'aider de la relation duale ici : $s_4 + 2\,s_5 = 8 - S$.)
fin
fin

cela donne :

pour S = 5	une solution	$f_3 = 6 \quad f_4 = 0 \quad f_5 = 0$		
pour S = 6	deux solutions	$f_3 = 5 \quad f_4 = 0 \quad f_5 = 1$	et	$f_3 = 4 \quad f_4 = 2 \quad f_5 = 0$
pour S = 7	deux solutions	$f_3 = 3 \quad f_4 = 2 \quad f_5 = 1$	et	$f_3 = 2 \quad f_4 = 4 \quad f_5 = 0$
pour S = 8	deux solutions	$f_3 = 2 \quad f_4 = 2 \quad f_5 = 2$	et	$f_3 = 0 \quad f_4 = 6 \quad f_4 = 0$

Voici **les 7 hexaèdres** dans l'ordre précédent :



5) Combien y a-t-il de polyèdres convexes à n arêtes ?

Si le nombre d'arêtes n est donné alors $S + F = n + 2$ est constant, donc pour avoir le nombre de polyèdres convexes à n arêtes, il suffit dans le tableau donnant le nombre $\pi(S,F)$ de polyèdres convexes de type (S,F) de faire la somme des $\pi(S,F)$ pour $S+F = n+2$ $S \geq 4$ $F \geq 4$.

On obtient :

nombre d'arêtes	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
nombre de polyèdres	**1**	**0**	**1**	**2**	**2**	**4**	**12**	**22**	**58**

Il s'agit de la suite M0339 de l'encyclopédie intitulée "polyedral graphs with n edges".

J'ai obtenu les dessins des **34 heptaèdres convexes (**en fin d'article**)** en utilisant leur représentation aplatie comme vue précédemment, et en me ramenant donc à la recherche de tous les pavages polygonaux en 6 polygones. Ce qui ne va pas tout seul car 2 pavages distincts peuvent être ceux d'un même polyèdre qu'on a aplati de 2 façons en ne supprimant pas la même face.

Le codage par matrice booléenne est évidemment plus adapté au calcul (informatique) mais encore faudrait-il caractériser les matrices qui représentent des polyèdres convexes qui existent !

Ces 34 heptaèdres sont classés selon leur nombre de sommets :

(*Voir la colonne F = 7 du tableau* Π)

1 à 2	ceux qui ont 6 sommets,	3 à 10	ceux qui ont 7 sommets,
11 à 21	ceux qui ont 8 sommets,	22 à 29	ceux qui ont 9 sommets,
30 à 34	ceux qui ont 10 sommets.		

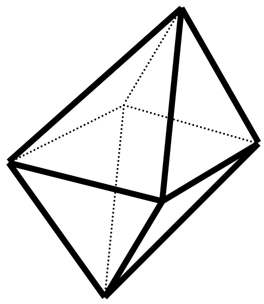
6) Le sujet est loin d'être épuisé.

Le fait que tout polyèdre convexe est la juxtaposition d'un nombre fini de tétraèdres est une piste intéressante.

Lorsqu'on « tronque » un sommet d'un polyèdre convexe, on obtient un polyèdre convexe de type voisin. C'est une autre piste.

Et je me suis limité aux convexes ! Pour les autres, la relation d'EULER n'est même pas garantie. Par exemple il n'est pas évident même avec le dessin de se représenter l'**heptaèdre croisé** ci-dessous (certaines faces se coupent selon des segments qui ne sont pas des arêtes) de matrice

1 1 0 1 0 1 0
1 0 1 0 1 1 0
1 1 0 0 1 0 1
1 0 1 1 0 0 1
0 1 1 1 1 0 0
0 1 1 0 0 1 1



Ce polyèdre n'a que 7 faces!

Bibliographie:

Modèles mathématiques (H.M. CUNDY et A.P. ROLLETT) chez CEDIC
The encyclopedia of integer sequences (N.J.A. SLOANE S. PLOUFFE) chez Academic Press.
Formes espace et symétries. A. HOLDEN chez CEDIC (Les DISTRACTS)

Les 34 heptaèdres convexes: